

MARCELO EDUARDO PEEV DOS SANTOS

**PROJETO DE UM SISTEMA DE APOIO AO PLANEJAMENTO
EM UMA EMPRESA DO RAMO DE RAÇÕES ANIMAIS**

**Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do Diploma de
Engenheiro de Produção**

São Paulo

2005

MARCELO EDUARDO PEEV DOS SANTOS

**PROJETO DE UM SISTEMA DE APOIO AO PLANEJAMENTO
EM UMA EMPRESA DO RAMO DE RAÇÕES ANIMAIS**

**Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do Diploma de
Engenheiro de Produção**

**Orientador:
Prof. Dr. Miguel Cezar Santoro**

**São Paulo
2005**

A meus pais e irmão

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Miguel Cezar Santoro, pelo apoio, idéias e incentivos fornecidos durante todo o período de orientação, além da paciência e compreensão demonstrada.

A meu tio Marcos Augusto dos Santos, por ter aberto sua empresa para a realização deste trabalho e assistido prontamente em todas as dúvidas que surgiram no desenvolvimento do mesmo.

A meu amigo Fernando Stump, que dedicou algumas horas de discussão sobre algoritmos e heurísticas de solução para problemas não-lineares de pesquisa operacional.

Aos professores da Escola Politécnica, que foram os responsáveis pelo conhecimento adquirido durante o curso de graduação, em especial àqueles diretamente ligados às disciplinas relacionadas com este trabalho: Prof. Dr. Hugo Yoshizaki, Prof.^a Dr.^a Débora Ronconi, Prof. Dr. Marcelo Pessoa e Prof. Dr. Mauro Spinola.

Aos meus pais, por apoio, sugestões e pela revisão do trabalho.

Por fim, mas não menos importantes, aos meus amigos, cujo apoio e carinho foi sempre fundamental.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é a redução do custo relacionado a matérias-primas em uma empresa do ramo de rações e suplementos animais, que representa mais da metade do custo de seus produtos. Uma característica deste ramo de negócios é a relativa liberdade existente quanto à composição de seus produtos, desde que uma série de restrições nutricionais seja atendida. Além disto, a demanda por seus produtos é altamente sazonal, assim como o custo de suas matérias-primas. A proposta deste trabalho é o desenvolvimento de um sistema informatizado de apoio ao planejamento de médio e curto prazo, que, com base em previsões de custos e de demanda, além de limitações produtivas, auxilie a empresa a formular seus produtos minimizando seu custo sem comprometer sua qualidade, e a adquirir suas matérias-primas no momento mais propício. No trabalho testam-se modelagens alternativas que foram comparadas segundo resultados e tempos de processamento, tendo-se optado por um modelo não-linear com um algoritmo específico. O trabalho apresenta o modelo não-linear desenvolvido, algoritmos para sua solução e a implementação deste num sistema de informação.

ABSTRACT

The purpose of this study is the reduction of raw-material related costs in a company, in the cattle feed sector, representing more than half of the cost of its products. A characteristic of this sector of business is the relative freedom existent in the composition of its products, since a series of nutritional requirements is met. Besides, the demand for its products is highly seasonal, as are the costs for its raw-materials. This study aims to the development of a mid and long-term planning support computer system, which, provided with cost and demand forecasts, and information regarding production limits, helps the company to formulate its products in a way that minimizes costs without compromising quality, and acquiring raw-material at the most suitable moment. In the study, alternative models were tested and compared upon results and run times, and a non-linear model with a specific algorithm was chosen. The study presents the non-linear model developed, algorithms for its solution and the implementation of the model in a computer system.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

1.	INTRODUÇÃO	1
1.1.	A empresa.....	1
1.2.	Produtos	4
1.3.	Formulação do Problema	6
1.4.	Objetivos do Trabalho.....	8
1.5.	Relevância do Trabalho.....	10
1.6.	Estrutura do Trabalho.....	11
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	12
2.1.	Planejamento de Produção	12
2.1.1	Hierarquia de Planejamento.....	12
2.1.2	Classificação de Sistemas Produtivos e Modelos Associados.....	16
2.1.3	Planejamento Agregado de Produção	19
2.2.	Formulação de Dietas de Mínimo Custo.....	24
2.2.1	Problemas de Mistura Ótima	24
2.2.2	Dietas de Mínimo Custo.....	25
2.2.3	Dietas de Mínimo Custo para Bovinos	26
2.3.	Modelagens de planejamento de produção com minimização de custos de formulação	29
2.3.1	Modelos separados de planejamento agregado e composição ótima .	29
2.3.2	Modelos integrados de planejamento agregado e composição ótima	30
2.4.	Programação Bilinear Generalizada.....	31
2.4.1	Solução por programação linear seqüencial	33
2.4.2	Solução por heurística alternada	35
3.	DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS	37
3.1.	Modelo de Planejamento Agregado	37

3.1.1	Modelo de Planejamento Agregado (MPA)	40
3.1.2	Solução por Modelo Hierárquico (MH)	45
3.1.3	Solução pela Heurística Alternada (ALT)	49
3.1.4	Solução via programação linear seqüencial (PLS)	50
3.1.5	Geração de soluções iniciais aleatórias (RND)	52
3.1.6	Geração de soluções iniciais dispersas por procedimento determinístico (PD)	54
3.2.	Testes comparativos entre métodos de solução.....	56
3.3.	Modelo de Seqüenciação (MS)	63
4.	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	64
4.1.	Casos de Uso.....	64
4.2.	Arquitetura do sistema	67
4.3.	Interfaces.....	69
4.4.	Classes Persistentes e Relacionamentos	78
5.	CONCLUSÃO	88
5.1.	Comentários sobre resultados obtidos	88
5.2.	Desdobramentos do trabalho.....	88
5.3.	Considerações finais.....	89
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	90

LISTA DE FIGURAS

UML - <i>Unified modeling language</i>	1
Figura 1.1: Distribuição média do faturamento anual.....	1
Figura 1.2: Consumo Interno e Exportação de Carne Bovina.....	3
Figura 1.3: Faturamento da Nutrinvest entre 2000 e 2004.....	3
Figura 1.4: Fluxograma do processo produtivo.....	5
Figura 1.5: Decomposição da estrutura de custos da empresa (2004).....	6
Figura 2.1: Hierarquia de planejamento de produção.....	13
Figura 2.2: Dinâmica do processo de decisão em planejamento (SANTORO, 2005)	15
Figura 3.1: Modelo de planejamento agregado proposto	38
Figura 4.1: Casos de uso do sistema desenvolvido.....	64
Figura 4.2: Arquitetura do sistema.....	68
Figura 4.3: Interfaces do sistema com o usuário	69
Figura 4.4: Interface de elaboração de produtos.....	71
Figura 4.5: Interface de seqüenciação.....	72
Figura 4.6: Interface de planejamento - pasta previsões	73
Figura 4.7: Interface de planejamento – pasta parâmetros.....	74
Figura 4.8: Interface de planejamento – plano de produção	75
Figura 4.9: Interface de planejamento – matérias-primas	76
Figura 4.10: Interface de planejamento – mão-de-obra	77
Figura 4.11: Interface de planejamento – formulação	78
Figura 4.12: Diagrama de classes e relacionamentos	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Hierarquia de planejamento em cinco níveis	14
Tabela 2.2: Modelos de planejamento comumente utilizados em diferentes sistemas produtivos (adaptado de SANTORO (2005))	17
Tabela 2.3: Variáveis de decisão típicas do modelo de planejamento agregado e custos associados.....	20
Tabela 2.4: Notação utilizada no modelo de SANTORO (2005).....	22
Tabela 2.5: Explicação das restrições do modelo de SANTORO (2005).....	23
Tabela 3.1: Famílias de produtos e seus requisitos nutricionais.....	59
Tabela 3.2: Matérias-primas e seus conteúdos nutricionais	59
Tabela 3.3: Custos de mão-de-obra.....	60
Tabela 3.4: Descrição dos modelos testados	61
Tabela 3.5: Diferença percentual entre o resultados das heurísticas e o melhor resultado encontrado.....	62
Tabela 3.6: Tempos de execução das heurísticas	62
Tabela 4.1: Atributos da classe item	79
Tabela 4.2: Atributos da classe família	80
Tabela 4.4: Atributos da classe ComposiçãoFamília	80
Tabela 4.5: Atributos da classe composição.....	81
Tabela 4.6: Atributos da classe Cliente	81
Tabela 4.7: Atributos da classe Fornecedor	82
Tabela 4.8: Atributos da classe Pedido	82
Tabela 4.9: Atributos da classe PedidoDetalhe	83
Tabela 4.10: Atributos da classe PlanoAgregado	83
Tabela 4.11: Atributos da classe PlanoAgregadoDetalhe	83
Tabela 4.12: Atributos da classe PrevisãoDemanda	84
Tabela 4.13: Atributos da classe PrevisãoMatériaPrima.....	85
Tabela 4.14: Atributos da classe Parâmetros.....	85
Tabela 4.15: Atributos da classe Entrada	86
Tabela 4.16: Atributos da classe EntradaDetalhe	86
Tabela 4.17: Atributos da classe Produção.....	86

Tabela 4.18: Atributos da classe Programa	87
Tabela 4.19: Atributos da classe ProgramaDetalhe	87

LISTA DE SIGLAS

ALT	- Heurística alternada
AR	- Processo estocástico auto-regressivo
ARIMA	- Classe de modelos com componentes integrativos, médias-móveis e autoregressivos
MH	- Modelo hierárquico
MPA	- Modelo de planejamento agregado
MRP	- <i>Material requirements planning</i>
MS	- Modelo de seqüenciação
NDT	- Nutrientes digestíveis totais
NMV	- Núcleo mineral e vitamínico
PB	- Proteína bruta
PBLG	- Programação bilinear generalizada
PD	- Procedimento determinístico para geração de soluções iniciais
PLS	- Programação linear seqüencial
PPCP	- Planejamento, programação e controle da produção
RND	- Heurística Randômica para geração de soluções iniciais
UML	- <i>Unified modeling language</i>
VBA	- <i>Visual Basic for Applications</i>

1. INTRODUÇÃO

Este capítulo introduz a empresa onde o trabalho foi realizado e seus produtos principais. Os problemas que motivaram o trabalho são então expostos e os objetivos detalhados. Por fim, sua relevância e estrutura são discutidas.

1.1. A empresa

Em 1994, o zootecnista e professor universitário Marcos Augusto dos Santos, após trabalhar em grandes fabricantes de ração bovina, opta pela via do empreendedorismo. É fundada então a Nutrinvest, cujo sistema produtivo é objeto de estudo deste trabalho.

A empresa tem como mercado os criadores de gado bovino de corte. O objetivo principal dos produtos da empresa é a manutenção da taxa de engorda do gado durante os meses de inverno, quando as pastagens secam. Assim sendo, a demanda por seus produtos é fortemente sazonal durante o ano, conforme mostra o gráfico da distribuição média das vendas durante os anos de 2000 a 2004:

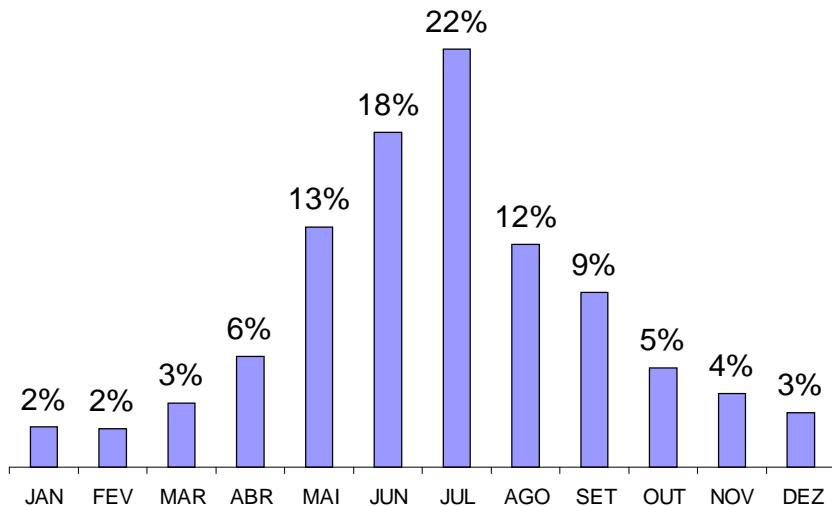


Figura 1.1: Distribuição média do faturamento anual

Analizando a empresa pelo prisma das estratégicas genéricas de PORTER (1980), esta segue claramente a estratégia de foco voltado à diferenciação, posicionando-se

no mercado como fornecedora de produtos de alta qualidade e elaborados sob medida para atender às necessidades específicas de cada cliente.

Apesar desta empresa ser de pequeno porte, com processamento anual menor que 1.000 toneladas, a Nutrinvest tem demonstrado capacidade para compensar a desvantagem de escala de produção junto aos grandes fabricantes de ração por meio da aplicação do micromarketing, segundo concepção de KOTLER(2003): através do desenvolvimento de produtos focados nas necessidades dos clientes individuais, a empresa é capaz de levá-lo a atingir suas finalidades de forma mais econômica, possibilitando que o preço cobrado por tonelada de ração seja superior à media de mercado.

Assim sendo, os serviços associados ao produto são fundamentais na empresa. Além do fornecimento da ração ou suplemento proteinado, os clientes são visitados com freqüência para coleta de dados, acompanhamento do processo de engorda e fornecimento de assistência e instrução para os funcionários do cliente. O relacionamento entre empresa e cliente tem um caráter que se aproxima de uma parceria, ao contrário do caráter transacional de simples momentos de compra e venda de produtos padronizados.

A empresa é sediada na cidade de Presidente Prudente, Estado de São Paulo, e até o ano 2000, a maioria de seus clientes estava situada em regiões próximas à cidade. No entanto, a partir deste ano, a empresa desenvolveu novos clientes no Estado do Mato Grosso, um dos estados que tem tido maior crescimento de atividade agropecuária dos últimos anos, segundo reportagem de SANTOS; CARVALHO (2004). Atualmente, 70% das vendas da empresa são destinadas a clientes do Estado do Mato Grosso.

De uma forma geral, a produção de carne bovina no Brasil apresentou crescimento expressivo durante a vida da empresa, principalmente nos últimos anos, movido em parte pela expansão das exportações e consolidação do Brasil como um dos principais *players* no mercado de carne bovina mundial:

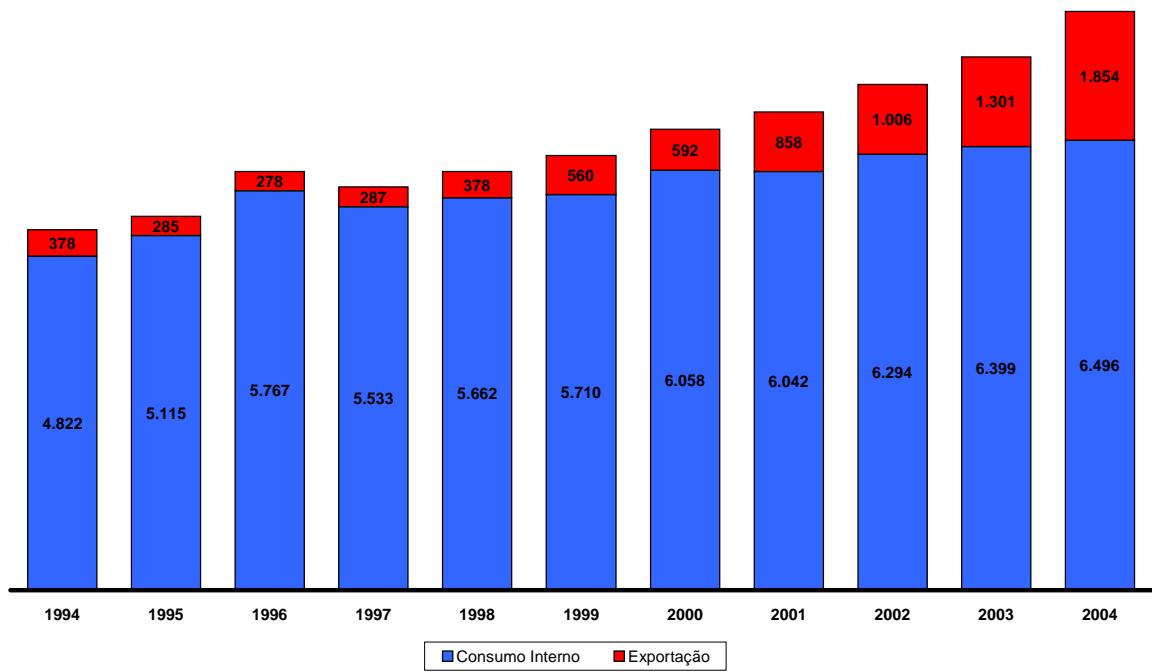


Figura 1.2: Consumo Interno e Exportação de Carne Bovina

Fonte: Associação Brasileira das Indústrias Exportadoras de Carne (2005)

Com o aquecimento do mercado de gado bovino de corte, a Nutrinvest obteve crescimento expressivo em seu faturamento nos últimos anos:

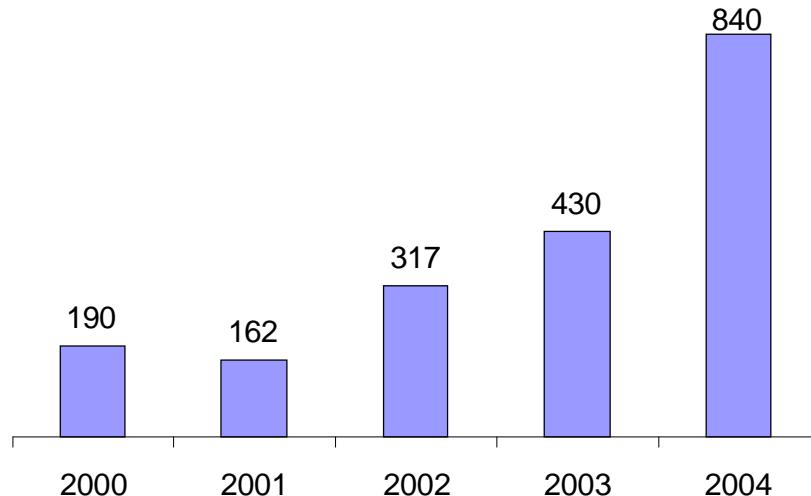


Figura 1.3: Faturamento da Nutrinvest entre 2000 e 2004

1.2. Produtos

Atualmente a empresa trabalha somente com fórmulas dirigidas ao gado bovino de corte, porém já atuou na área de rações para eqüinos e outros animais. Devido ao seu modelo de negócios estar voltado à elaboração de fórmulas diferenciadas para cada criador, a empresa fabrica uma imensa variedade de produtos, que podem ser agrupados em duas grandes linhas:

- **Rações:** têm como objetivo ser a fonte principal de nutrientes do gado, e são normalmente adotadas quando as condições do pasto são muito precárias ou o gado é tratado em regime de semi-confinamento;
- **Suplementos Proteinados:** são fontes nutricionais que visam complementar deficiências existentes no pasto, de forma a garantir uma relação custo-benefício ótima nas atividades de cria, recria e engorda.

O processo de formulação dos produtos é composto das seguintes etapas:

- **Coleta de informações com o criador:** são coletados dados relativos ao tipo de gado, sua idade e peso. Além disto, busca-se um histórico alimentar contendo as rações e alimentos previamente ministrados ao gado.
- **Análise do pasto:** o pasto é analisado para determinação de suas propriedades nutritivas. Também se busca verificar a adequação das instalações e procedimentos utilizados pelo criador.
- **Análise do rebanho:** o gado é inspecionado visualmente, com o objetivo de detectar possíveis doenças e deficiências alimentares, como falta de vitaminas etc.

- **Determinação das necessidades alimentares:** a partir das três análises descritas acima, o zootecnista determina os requisitos nutricionais mínimos exigidos para que o animal mantenha uma taxa de engorda eficaz.
- **Formulação da ração ou suplemento:** dentre os ingredientes disponíveis no estoque e no mercado, são selecionados aqueles que em conjunto atendam às necessidades alimentares calculadas no passo anterior.

Um ponto importante na administração de alimentos para animais é o fato dos animais necessitarem de um período de adaptação para acostumarem-se a uma nova dieta, o que causa uma redução na taxa de engorda. Por este motivo, é altamente recomendável a manutenção de uma fórmula única para cada rebanho, durante o período de seca, quando se dá a administração de rações.

O processo de produção é simples, sendo o batimento dos produtos a operação principal. O batimento compreende a mistura das matérias-primas, porém sem a adição de água. Abaixo está o fluxograma do processo:

Passo	Descrição
1	○ Recebimento de matéria-prima
2	⇨ Para pesagem
3	□ Pesagem
4	⇨ Para estocagem
5	▽ Estoque
6	⇨ Para batimento
7	○ Batimento
8	□ Pesagem (balança eletrônica)
9	○ Enpacamento
10	⇨ Para estocagem
11	▽ Estocagem de produto acabado

Figura 1.4: Fluxograma do processo produtivo

A empresa conta com dois batedores atualmente, e a capacidade conjunta de batimento é de 21 toneladas por dia. Para atingir tal nível de produção, no entanto, devem trabalhar dois operários regulares e três operários temporários. Na operação com somente dois operários regulares, o nível diário de produção cai para 8 toneladas.

1.3. Formulação do Problema

O principal problema estudado neste trabalho é a redução de custos relacionados à matéria-prima na Nutrinvest. Uma análise da estrutura de custos da empresa revela que a parcela relativa à administração de matérias-primas é bastante elevada, como pode ser evidenciado na figura abaixo, que representa a decomposição dos principais custos:

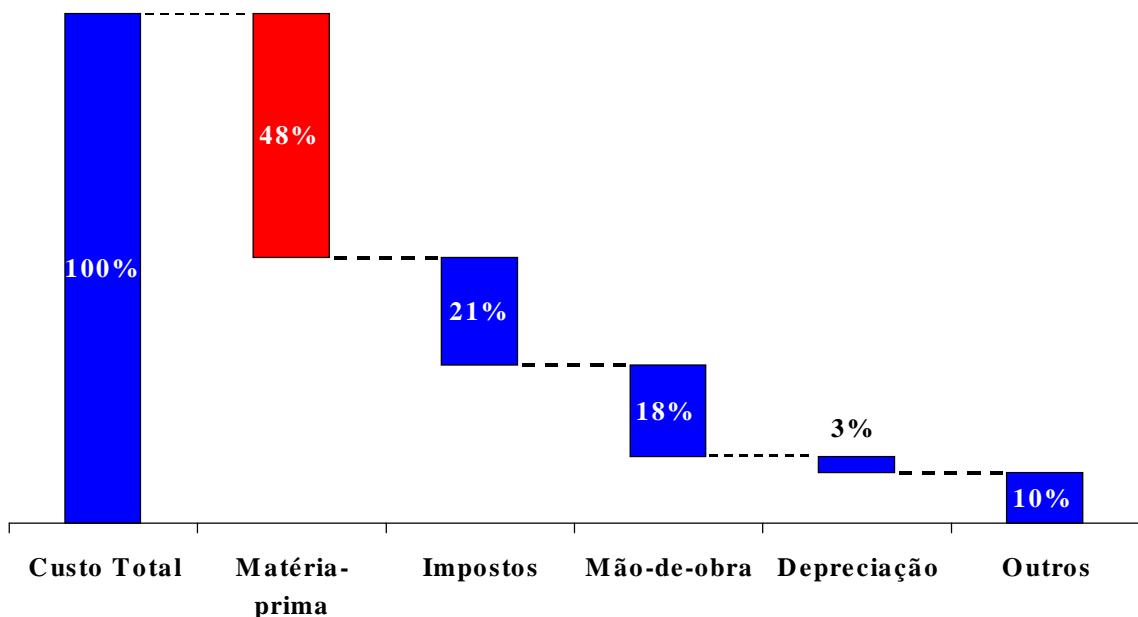


Figura 1.5: Decomposição da estrutura de custos da empresa (2004)

A empresa segue uma estratégia de antecipar as compras de matérias-primas para antes do inverno, momento em que os preços, puxados pela demanda, passam por picos sazonais. Esta estratégia, no entanto, gera elevados níveis de estoques de matérias-primas, acarretando em imobilização de capital e despesas de estocagem.

Pelas características desta empresa, as decisões de administração de matérias-primas afetam e são afetadas pelas seguintes decisões:

- **Formulação dos produtos:** os produtos desta indústria são definidos pelo seu conteúdo nutricional, não por sua composição, o que possibilita a reformulação periódica do produto na busca de uma composição de mínimo custo. Apesar desta flexibilidade na formulação, esta deve manter-se estável durante um período de fornecimento, normalmente de três a seis meses, dado que o gado alimentado se acostuma ao sabor, e uma mudança na composição leva o gado a consumir menos ração durante aproximadamente duas semanas, o que resulta em redução no ganho de peso do animal.
- **Planejamento de Produção:** para o atendimento do plano de produção, os materiais devem estar disponíveis no momento de sua demanda para processamento. Assim, as estratégias de utilização da capacidade produtiva para o atendimento da demanda colocam restrições nos períodos de compra da matéria-prima. Por outro lado, as variações no valor da matéria-prima no tempo variam os custos de produção e, portanto, influenciam na escolha do melhor plano de produção.

Uma vez que cada uma destas decisões interfere no resultado das demais, estas devem ser consideradas em conjunto para a obtenção de uma solução que minimize os custos globais de aquisição de materiais. Com o crescimento no número de clientes atendidos, produtos oferecidos e matérias-primas candidatas, a complexidade deste problema cresce consideravelmente. Atualmente, a empresa identificou 26 matérias primas que podem ser utilizadas para composição de seus produtos, sem contar vitaminas e suplementos minerais.

Apesar destas dificuldades, a empresa ainda realiza suas atividades de planejamento sem contar com o apoio de modelos formais, fato que pode ser explicado por tratar-se ainda de uma empresa de fundação recente, que sofreu rápido processo de crescimento ocorrido nos últimos anos, mas ainda conserva os procedimentos criados

em seus primeiros anos de existência, quando o número de clientes era bastante diminuto. No entanto, ultrapassados os estágios iniciais do desenvolvimento do negócio, a empresa busca agora reduzir seus custos operacionais para aumentar a competitividade de seus produtos.

Além da não-utilização de modelos formais, não existe um acompanhamento sistemático dos preços dos insumos e uma análise periódica realizada com o intuito de buscar novas formulações de menor custo para todos os produtos existentes. A maior parte dos preços coletados refere-se às matérias-primas em utilização pela empresa, o que gera uma tendência de continuidade do uso desta matéria-prima.

1.4. Objetivos do Trabalho

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um sistema de apoio à decisão, visando à redução dos custos de aquisição, produção, não-atendimento da demanda e estocagem de matérias-primas e produtos acabados, por meio de um modelo de planejamento e formulação que sugira:

- Formulação ótima por produto
- Quantidades de matérias-primas a serem compradas por período
- Volume de produção por período
- Volume de não-atendimento de demanda (por questões econômicas)
- Quantidade de mão-de-obra em regime de hora-extra e temporária necessária

O escopo do trabalho envolve o desenvolvimento de um modelo de planejamento agregado de produção e aquisição de matérias-primas baseado em uma formulação matemática de mínimo custo, além de um modelo complementar de seqüenciação, gerando planos diários de produção para cada produto.

O sistema desenvolvido contemplará os seguintes aspectos:

- **Planejamento agregado em dois estágios:** o mesmo modelo deve considerar simultaneamente a etapa de aquisição de materiais e a etapa de transformação destes materiais em produtos acabados, de modo a garantir que a minimização de custos em uma das etapas não provoque elevação dos custos na outra.
- **Modelo de seqüenciação:** Diariamente, um modelo de seqüenciação deve ser acionado para determinar os itens a serem produzidos, de forma que as metas mensais do plano agregado sejam cumpridas.
- **Limites de estocagem:** as matérias-primas e os produtos finais são de natureza perecível, com vida máxima de seis e quatro meses respectivamente, que o modelo deve respeitar. Outro ponto é o fato da empresa não trabalhar com armazéns externos à unidade produtiva, limitando o espaço para estocagem.
- **Limites produtivos:** a capacidade limite de processamento instalada deve ser respeitada, sendo que os operadores podem trabalhar em regime de hora-extra, ou serem admitidos temporários.
- **Restrições de formulação dos produtos:** as formulações das diferentes famílias de produtos devem atender aos requisitos nutricionais necessários em termos de energia, proteínas, e proporção de tipos de alimentos. A quantidade de certas matérias-primas na formulação, como a uréia, deve ser limitada, para que o produto não se torne tóxico. Ainda, algumas matérias-primas devem ter uma porcentagem pré-determinada na formulação do produto. O modelo de planejamento agregado deve calcular a fórmula básica para cada família de produtos, e o modelo de desagregação deve complementar a fórmula com as vitaminas e suplementos necessários para cada produto individualmente.

- **Algoritmos para resolução:** além da formulação dos modelos matemáticos, também serão apresentados algoritmos computacionalmente eficientes para a resolução dos mesmos.
- **Interface com o usuário:** implementação dos modelos matemáticos e algoritmos de resolução em software amigável ao usuário, de forma que os modelos possam ser utilizados sem a necessidade de interação com softwares científicos.
- **Armazenamento de dados:** um banco de dados associado deve possibilitar o armazenamento de entradas e saídas de dados dos modelos matemáticos, servindo de fonte de informações a respeito de preços, demandas, e outras consultas.

1.5. Relevância do Trabalho

O trabalho desenvolvido apóia-se sobre alguns dos conceitos fundamentais da engenharia de produção, como planejamento agregado de produção, programação da produção e problemas de mistura ótima, que atestam sua relevância perante a Escola Politécnica.

Do curso de engenharia de produção, o trabalho conta principalmente com conceitos das disciplinas de PPCP (planejamento, programação e controle da produção), Pesquisa Operacional, além da disciplina de computação existente no ciclo básico.

O autor optou por desenvolver o trabalho fora de seu estágio, em uma empresa pertencente a um membro de sua família, que havia manifestado anteriormente o desejo de uma solução de planejamento e controle. Três foram os fatores que pesaram na escolha desta empresa:

- **Necessidade manifesta:** é crença do autor que quando as duas partes envolvidas possuem interesses no desenvolvimento do trabalho, torna-se mais fácil a realização deste.
- **Tema de interesse:** os problemas manifestados pela empresa pertencem certamente ao campo da Engenharia de Produção.
- **Facilidade na obtenção de informações:** o relacionamento existente entre o autor e o proprietário da empresa é de confiança e facilitam a coleta de dados.

1.6. Estrutura do Trabalho

No segundo capítulo deste trabalho, é realizada uma revisão bibliográfica dos temas importantes para que os objetivos deste trabalho sejam atingidos. São apresentados os conceitos de planejamento, de problemas de mistura ótima e de modelos que contém elementos de ambos. Também são apresentados tópicos de pesquisa operacional destinados à formulação de algoritmos para resolução do modelo matemático não-linear de planejamento agregado, que será proposto neste trabalho.

No terceiro capítulo, serão apresentados os modelos de planejamento agregado e programação da produção propostos. Além destes, também serão apresentadas uma série de heurísticas para resolução do modelo de planejamento agregado, e resultados de testes para determinação da heurística mais adequada.

No quarto capítulo, será detalhado o desenho de um sistema de informação que operacionaliza o uso dos modelos propostos neste trabalho.

Por fim, serão apresentadas as conclusões e desdobramentos deste trabalho.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta uma revisão da literatura acerca dos conceitos teóricos utilizados neste trabalho. Primeiramente, é apresentado o conceito de planejamento da produção, partindo de uma visão mais ampla e resultado no modelo considerado mais apropriado para resolução do problema em questão.

Em segundo lugar, são apresentados os problemas de dieta ótima, que no contexto deste trabalho são tratados como um tipo de problema de mistura ótima. Um modelo de dieta ótima para ruminantes é apresentado.

Em seguida, são expostos os tipos de modelos encontrados na literatura que combinam os problemas de planejamento e mistura ótima.

Por fim, trata-se da classe de modelos matemáticos a que pertence o modelo que será proposto. São expostos os modelos de programação bilinear generalizada (PBLG), e os métodos encontrados na literatura para sua solução.

2.1. Planejamento de Produção

O conceito de planejamento de produção é apresentado partindo-se da hierarquia de planejamento, situando as diversas atividades do planejamento e o relacionamento existente entre elas. São apresentados então as classificações dos sistemas produtivos, e os modelos considerados mais apropriados para o tratamento destes. O modelo de planejamento agregado, considerado mais apropriado para a empresa, é então estudado com maior detalhamento, incluindo a modelagem matemática deste problema, que serve de base para formulação do modelo proposto.

2.1.1 Hierarquia de Planejamento

A atividade de planejamento da produção comprehende o conjunto de decisões a respeito do fluxo de bens em uma empresa, que pode ser dividido em subconjuntos representando os níveis hierárquicos de planejamento. Os subconjuntos são

denominados níveis hierárquicos porque as decisões tomadas em determinado nível estabelecem restrições aos níveis inferiores, que por sua vez realimentam os níveis superiores.

HAX; CANDEA (1984) descrevem uma estrutura de planejamento em três níveis: estratégico, tático e operacional. Estes três níveis e suas relações estão demonstrados no diagrama abaixo, adaptado de SANTORO (2005):

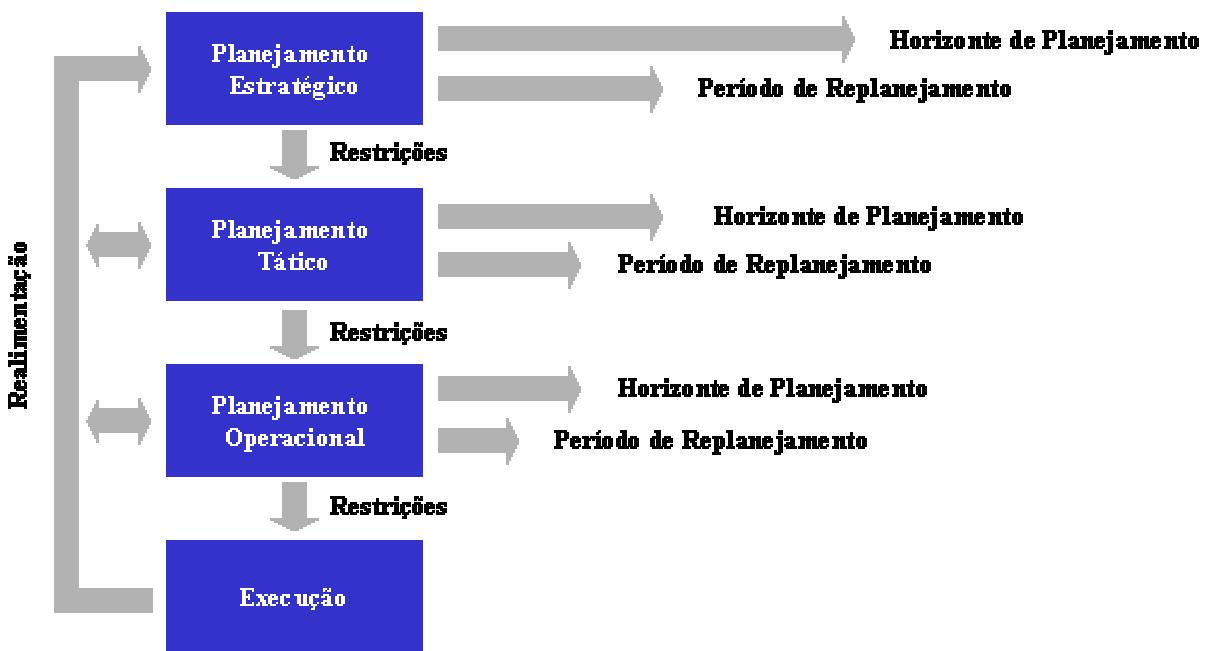


Figura 2.1: Hierarquia de planejamento de produção

Cada nível desta hierarquia pode ser descrito da seguinte forma, segundo HAX; CANDEA (1984):

- **Nível estratégico:** está relacionado principalmente com o estabelecimento de políticas gerenciais e com o desenvolvimento dos recursos necessários à organização, para satisfazer às exigências externas de forma consistente com suas metas. São decisões com efeitos duradouros, tendo longos horizontes de planejamento, e muitas vezes envolvem grandes dispêndios financeiros. Entre estas decisões estão: localização de unidades produtivas e de distribuição,

dimensionamento de unidades produtivas e de distribuição, escolha de processo tecnológico a ser adotado, políticas em relação aos recursos humanos.

- **Nível tático:** tem como objetivo a utilização eficiente e eficaz dos recursos disponíveis para a empresa. O horizonte de planejamento típico é de um a dois anos. Informações bastante agregadas são utilizadas na tomada destas decisões, que tipicamente incluem: utilização de horas normais e extras de mão-de-obra, alocação de capacidade entre diferentes famílias de produtos, acumulação de estoques sazonais, definição de canais de distribuição e seleção de alternativas de transporte.
- **Nível operacional:** tem como objetivo garantir que tarefas específicas sejam completadas de forma eficiente e eficaz. Nesta etapa o nível de detalhe é alto, sendo que o plano trata com os itens ao invés de famílias como no nível tático, e o horizonte de planejamento é curto. As decisões típicas deste nível são: designação de ordens para equipamentos individuais; seqüenciamento destas ordens; controle do estoque; roteirização de veículos.

No entanto, a hierarquia de planejamento não precisa necessariamente conter três níveis. MORTON (1999), ao contrário, apresenta um exemplo de hierarquia de planejamento de produção em cinco níveis, conforme descrito na tabela abaixo:

Tabela 2.1: Hierarquia de planejamento em cinco níveis

Nível	Exemplos de Decisões	Horizonte
1. Planejamento Estratégico	Expansão da planta Layout da planta Desenho da planta	5-10 anos
2. Planejamento Agregado	Reconfiguração de recursos Reconfiguração logística	1-2 anos
3. Planejamento Tático	Planejamento de necessidades Ajuste de datas de entrega	3-6 meses

4. Seqüenciamento	Designação de pedidos a máquinas Balanceamento de linhas de produção Dimensionamento de bateladas	2-6 semanas
5. Seqüenciamento Reativo / Controle	Reorganizações devido a quebra de equipamentos, atraso de material e serviços urgentes	1-3 dias

SANTORO (2005) explica a dinâmica do processo de planejamento como sendo a tomada de decisões para cada período que compõe o horizonte de planejamento, de forma que a soma da utilidade dos estados do sistema produtivo nestes períodos seja maximizada. Estas decisões são tomadas com base no estado inicial do sistema e informações disponíveis no momento do planejamento.

Esta dinâmica encontra-se esquematizada na seguinte figura, onde $D_{1...N}$, $I_{1...N}$, $U_{1...N}$, $E_{1...N}$ representam, respectivamente, as decisões tomadas, as informações disponíveis, as utilidades resultantes e os estados do sistema produtivo dos períodos de 1 a N, com E_0 representando o estado inicial e N o número de períodos:

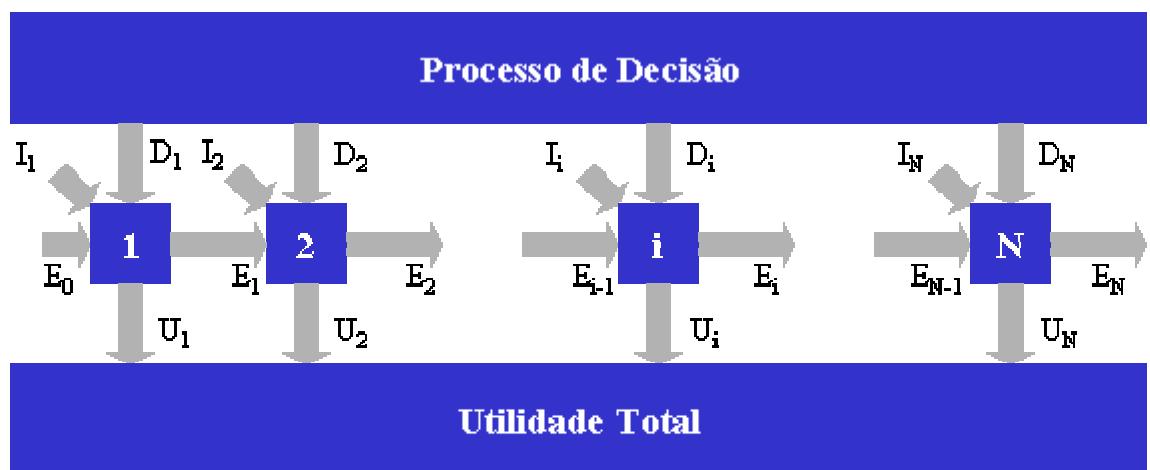


Figura 2.2: Dinâmica do processo de decisão em planejamento (SANTORO, 2005)

2.1.2 Classificação de Sistemas Produtivos e Modelos Associados

Como foi exposto no tópico anterior, não há um número fixo de níveis hierárquicos de planejamento, bem como quais decisões devem fazer parte destes. Conforme notam HAX; CANDEA (1984) e SANTORO (2005), o modelo de planejamento a ser adotado em cada empresa é bastante influenciado por sua estrutura de produção, objeto de discussão deste tópico.

HAX; CANDEA (1984) descrevem uma estrutura produtiva genérica como sendo composta por três grandes categorias de elementos: compras, produção e distribuição.

Os elementos ligados a compras lidam com a obtenção de matérias-primas, ferramentas, insumos, material de manutenção, partes e subsistemas. Produção engloba as operações de fabricação e montagem, e representa o processo de conversão de matéria-prima em produto acabado. Por fim, a distribuição lida com a disponibilização de produto acabado da produção aos consumidores finais ou intermediários.

Uma dada empresa, no entanto, não tem necessariamente todos os elementos citados, e em determinadas empresas, alguns desses elementos são mais complexos do que em outras, dependendo de suas atividades. Por este motivo, torna-se útil classificar os sistemas produtivos com base em seus elementos principais, e a partir desta classificação, propor os modelos de planejamento mais adequados.

BUFFA; MILLER (1979) utilizam duas dimensões fundamentais para classificar os sistemas produtivos. A primeira dimensão está relacionada à própria unidade de produção, e os sistemas são classificados numa escala que vai de processo contínuo até processo intermitente. JOHNSON; MONTGOMERY (1974) também compartilham esta abordagem, e os sistemas são divididos em:

- **Estoque puro:** neste sistema, a atividade preponderante é a de compras, e as demais são inexistentes ou muito simples. Dentro deste tipo encontram-se as empresas engajadas em operações de revendas a varejo e atacado.
- **Produção contínua:** estes sistemas englobam a fabricação e/ou montagem de produtos em elevado volume e pouca diferenciação, por meio de linhas dedicadas.
- **Produção intermitente:** este tipo de produção encontra-se normalmente presente quando a atividade de manufatura envolve a fabricação de diversos produtos em batelada, compartilhando diversos centros de produção. Este sistema pode ser subdividido ainda em produção intermitente repetitiva, quando os produtos são padronizados; e produção intermitente sob encomenda, quando os produtos têm elevado grau de diferenciação entre si.
- **Projetos:** este sistema é considerado um caso particular do sistema de produção intermitente onde o esforço de produção para dado produto é único, e cada produto tem características muito distintas entre si.

Com base nesta classificação, SANTORO (2005) relaciona os modelos de suporte ao planejamento, comumente utilizados para cada tipo de sistema produtivo:

Tabela 2.2: Modelos de planejamento comumente utilizados em diferentes sistemas produtivos (adaptado de SANTORO (2005))

Sistema Produtivo	Modelo de Planejamento Tático	Modelo de Planejamento Operacional
Estoque Puro	Planejamento e Controle de Estoques	
Contínua	Planejamento Agregado	Balanceamento de Linhas
Intermitente	Planejamento Agregado	Seqüenciamento
Projetos	Planejamento em Redes	Programação em Redes

Segue uma breve descrição dos modelos contidos na tabela 2.2:

- **Planejamento e Controle de Estoques:** estes modelos buscam garantir a disponibilidade de material, indicando o momento e quantidade de compras para cada item. São modelos reativos, isto é, não se antecipam a variações na demanda dos produtos, e trabalham com elevado nível de detalhe;
- **Planejamento Agregado:** são modelos de planejamento de produção e estoques que buscam minimizar custos de produção, estocagem e falta de atendimento. Como o próprio nome indica, este tipo de modelo trabalha com itens de características semelhantes agregados em famílias, e considera limitações de capacidade. Esta classe de modelo será explorada em maior profundidade no decorrer do trabalho.
- **Balanceamento de Linhas:** em sistemas de produção contínua, a produção ocorre por meio de linhas dedicadas, que consistem na seqüência de um determinado número de estações de trabalho, cada uma delas executando uma operação. O produto procede em série de cada estação de trabalho até a próxima, até percorrer todas estações da linha. Cada operação é um agrupamento de tarefas, que são definidas como o menor elemento divisível de uma atividade. O objetivo dos modelos de balanceamento de linhas é agrupar as tarefas em operações, obedecendo a restrições, de forma a minimizar o tempo de ciclo, isto é, o tempo entre a saída de dois produtos consecutivos da linha.
- **Seqüenciamento:** estes modelos definem a melhor seqüência de processamento de ordens de produção, de forma a maximizar determinado parâmetro, como a porcentagem de itens expedidos dentro do prazo, minimização do estoque, maximização da velocidade do fluxo ou ainda a maximização do nível de utilização de recursos produtivos. Estes modelos trabalham com baixo nível de agregação, e podem considerar custos de compras, produção, estoques e não atendimento de vendas.

- **Planejamento e Programação em Redes:** buscam programar as datas de realização das diversas atividades de um projeto ou produto com características bastante distintas, de forma a atingir um objetivo determinado, que pode ser, por exemplo, completar a execução até determinada data ou minimizar o custo do projeto.

A segunda dimensão utilizada por BUFFA; MILLER (1979) diz respeito a política de marketing relacionada ao tempo de atendimento ao consumidor. Em um extremo, há empresas que produzem em antecipação aos pedidos dos clientes, lançando mão de estoques de produtos finais. Para os sistemas produtivos situados próximos deste extremo, os modelos de planejamento agregado de produção, estoque e mão-de-obra e gestão de matérias-primas são indicados como os mais apropriados. No outro extremo encontram-se as empresas que somente após receberem pedidos de clientes, compram a matéria-prima e iniciam a produção. São indicados os modelos de planejamento agregado para o uso da capacidade disponível e seqüenciamento de ordens.

2.1.3 Planejamento Agregado de Produção

Quando as condições afetando o processo produtivo não são estáveis no tempo (devido a mudanças na demanda, componentes de custo ou disponibilidade da capacidade), HAX; CANDEA (1984) sustentam que a produção deveria ser planejada de uma forma agregada para obter um aproveitamento eficaz dos recursos da empresa. Na presença de instabilidades, uma atitude puramente reativa da atividade de produção, que buscasse tão somente atender a demandas de curto prazo e ignorasse as consequências futuras das decisões presentes, acarretaria em ineficiências graves ou mesmo na impossibilidade de atender à demanda.

SANTORO(2005) listou as variáveis de decisão típicas para o planejamento agregado e os custos associados a estas variáveis:

Tabela 2.3: Variáveis de decisão típicas do modelo de planejamento agregado e custos associados

Variáveis de decisão	Custos associados
Estoque	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Estocagem (espaço físico e manuseio) ▪ Capital (pela imobilização dos estoques)
Atraso	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Mal atendimento
Não atendimento	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Vendas perdidas ▪ Recrutamento ▪ Seleção ▪ Admissão ▪ Treinamento ▪ Turnos Adicionais
Admissão	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Encargos ▪ Imagem no mercado
Demissão	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Custos de horas extras de mão-de-obra
Horas Extras	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Sub-utilização da mão-de-obra
Ociosidade	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Custo adicional da produção subcontratada ▪ Controle da sub-contratação
Subcontratação	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Propaganda ▪ Promoção (receita inferior)
Políticas de Mercado	

Devido ao grande número de variáveis envolvidas, existe um consenso entre HAX; CANDEA (1984), NAHMIAS (1997), MORTON (1999) e SANTORO (2005) quanto a recomendação da adoção de modelos matemáticos para o auxílio do processo de planejamento agregado.

SANTORO (2005) descreve as desvantagens de uma abordagem informal e empírica do planejamento como sendo a visão distorcida dos custos, baixo nível de coerência no tempo, impossibilidade de consideração de todos os fatores influentes e variáveis importantes simultaneamente, simulação para obtenção da solução com objetivos não quantificados e sem procedimentos formais, satisfação com solução viável e não ótima, e excessiva dependência de indivíduos pela pouca ou nula formalização. As vantagens dos modelos matemáticos formais e informatizados são descritas como a

maior aderência à realidade pela menor agregação e consideração de mais restrições, a viabilização do conceito de planejamento pelo maior horizonte, a rapidez de resposta e decisão permitindo dinâmica mais adequada, relatórios e telas gerenciais mais completos, a liberação de tempo pela menor participação na obtenção das informações e no processo decisório, e a solução justificada de conflitos pela maior transparência dos critérios e consequente neutralidade.

Os modelos matemáticos são comumente descritos pelas seguintes características:

- Linear ou não-linear
- Estático ou dinâmico
- Com valores contínuos ou discretos
- Determinísticos ou estocásticos

Uma classe de modelos bastante popular é a dos modelos lineares, pois, segundo HAX; CANDEA (1984), estes permitem a incorporação de um grande número de variáveis de decisão e restrições e são resolvidos a baixo custo. Um modelo clássico de planejamento agregado, extraído de SANTORO (2005), encontra-se formulado a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T (m_{it} \cdot PRD_{it} + e_{it} \cdot EST_{it} + f_{it} \cdot FAL_{it}) + \\ & + \sum_{c=1}^C \sum_{t=1}^T (n_{ct} \cdot HNO_{ct} + o_{ct} \cdot HOC_{ct} + x_{ct} \cdot HEX_{ct} + \\ & + a_{ct} \cdot ADM_{ct} + d_{ct} \cdot DEM_{ct}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito à} \quad & (EST_{it-1} - FAL_{it-1}) + PRD_{it} - PVE_{it} = (EST_{it} - FAL_{it}) \\ & (i = 1 \dots I; t = 1 \dots T) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^I \left(\frac{t_{im}}{IEF_{im}} \right) \cdot PRD_{it} \leq DIS_{mt} \cdot IEF_c \quad (m = 1 \dots M; t = 1 \dots T) \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^I \left(\frac{t_{ic}}{IEF_{ic}} \right) \cdot PRD_{it} = (HNO_{ct} + HEX_{ct}) \cdot IEF_c \\ (c = 1 \dots C; t = 1 \dots T) \quad (2.4)$$

$$HNO_{ct} + HOC_{ct} = DIS_{ct} \quad (c = 1 \dots C; t = 1 \dots T) \quad (2.5)$$

$$HEX_{ct} \leq IEX_c \cdot DIS_{ct} \quad (c = 1 \dots C; t = 1 \dots T) \quad (2.6)$$

$$DIS_{ct} - DIS_{ct-1} = ADM_{ct} - DEM_{ct} \quad (c = 1 \dots C; t = 1 \dots T) \quad (2.7)$$

$$EST_{i0} = eee; FAL_{i0} = fff; DIS_{i0} = ddd \\ (i = 1 \dots I; c = 1 \dots C) \quad (2.8)$$

Todas as variáveis de decisão são não-negativas

A notação utilizada obedece à seguinte tabela:

Tabela 2.4: Notação utilizada no modelo de SANTORO (2005)

Tipo	Notação	Descrição
Índices	i	índice de produtos
	c	índice de centros produtivos – humanos
	m	índice de centros produtivos – máquinas
	t	índice de períodos no horizonte de planejamento
Variáveis de Decisão	PRD_{it}	nível de produção de i em t
	EST_{it}	nível de estoque de i no final de t
	FAL_{it}	falta prevista de i no final de t
	HNO_{ct}	previsão de utilização de homens-hora em hora normal, em c em t
	HEX_{ct}	previsão de utilização de homens-hora em hora extra, em c em t
	HOC_{ct}	previsão de ociosidade em homens-hora, em c em t
	ADM_{ct}	previsão de admissão de homens-hora, em c em t
	DEM_{ct}	previsão de demissão de homens-hora, em c em t
	DIS_{ct}	disponibilidade total de homens-hora, em c em t
	DIS_{mt}	disponibilidade total de máquinas-hora, em m em t
	m_{it}	custo unitário direto de produção (sem mão-de-obra direta)

Custos Associados	e_{it}	custo de armazenagem de uma unidade de i em t
	f_{it}	custo de falta de uma unidade de i em t
	n_{ct}	custo de homem-hora em hora normal, em c em t
	o_{ct}	custo de homem-hora em hora ociosa, em c em t
	x_{ct}	custo de homem-hora em hora extra, em c em t
	a_{ct}	custo de admissão de homem-hora, em c em t
	d_{ct}	custo de demissão de homem-hora, em c em t
Outros parâmetros	PVE_{it}	venda prevista de i em t
	t_{ic}	Homens-hora necessários para produzir uma unidade de i em c
	t_{im}	Homens-máquina necessários para produzir uma unidade de i em m
	IEF_{ic}	eficiência na operação de i em c (%)
	IEF_{im}	eficiência na operação de i em m (%)
	IEF_c	eficiência na utilização da disponibilidade total de c (%)
	IEF_m	eficiência na utilização da disponibilidade total de m (%)
	IEX_c	porcentual aceitável de homens-hora em hora extra, em c em t (%)

Este modelo tem como objetivo minimizar o custo total de produção da empresa, que compreende os custos de produção, estocagem, falta, horas-extras, admissão e demissão, conforme a fórmula (2.1). As restrições encontram-se explicadas na tabela a seguir:

Tabela 2.5: Explicação das restrições do modelo de SANTORO (2005)

Restrição	Explicação
(2.2)	Garante o balanço entre a produção, estoque e falta de atendimento de cada período e produto, respeitadas as previsões de venda
(2.3)	Faz com que o número de unidades produzidas não ultrapasse a capacidade instalada de horas-máquina, para cada centro e período
(2.4)	Divide o número de horas-homem necessárias entre horas normais e horas ociosas em um dado período para um dado centro
(2.5)	Fixa o número total de horas-homem, como sendo o número de horas extras somados ao número de horas normais consumidas em um dado período, para um dado centro
(2.6)	Força o número de horas extras ser inferior a uma dada porcentagem do número de horas disponíveis
(2.7)	Contabiliza as admissões e demissões no número de horas-homem disponíveis
(2.8)	Especifica a disponibilidade de estoque, horas-homem e existência de falta de atendimento no período anterior ao primeiro

2.2. Formulação de Dietas de Mínimo Custo

Neste tópico é abordado o problema genérico de mistura ótima, a formulação de dietas ótimas como uma classe deste problema, e por fim a aplicação de modelos de dieta ótima para bovinos.

2.2.1 Problemas de Mistura Ótima

Os problemas desta categoria estão relacionados à determinação das proporções relativas entre componentes numa dada mistura, obedecendo às restrições existentes, de forma a maximizar (ou minimizar) determinada propriedade da mistura, normalmente o custo. Em ASHAYERI et al. (1993) pode-se encontrar uma revisão conceitual do problema de mistura e aplicações deste na indústria.

Os problemas de mistura podem ser divididos em dois grandes grupos: mistura simples e múltiplas misturas. No caso de múltiplas misturas, o objetivo é minimizar o custo total de produzir diversas misturas simultaneamente, sujeitas a restrições relativas ao estoque comum de matérias-primas. Já os problemas de mistura simples, buscam minimizar o custo de cada mistura de forma isolada. No caso de restrições de disponibilidade de uma ou mais matérias-primas que podem ser usadas em diversas misturas, um modelo de múltiplas misturas deve ser utilizado.

Um modelo de mistura simples, adaptado de WINSTON (1994), é apresentado a seguir:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^I c_i \cdot x_i \quad (2.9)$$

$$\text{sujeito à} \quad \sum_{i=1}^I a_{ij} \cdot x_i \geq r_j \quad (j=1 \dots J) \quad (2.10)$$

As variáveis x_i representam a quantidade dos componentes i na mistura, enquanto que os coeficientes c_i representam o custo por unidade de x_i , os coeficientes a_{ij} representam a quantidade do nutriente j presente no componente i , e os termos independentes r_j representam as exigências nutricionais mínimas de j na mistura.

Este modelo pode ser transformado em um modelo de múltiplas misturas substituindo-se as variáveis x_i por x_{ik} , os coeficientes r_j por r_{jk} , onde k são as diferentes misturas, e a introdução de disponibilidades d_i para cada componente:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^I \left(c_i \cdot \sum_{k=1}^K x_{ik} \right) \quad (2.11)$$

$$\text{sujeito à} \quad \sum_{i=1}^I a_{ij} \cdot x_{ik} \geq r_{jk} \quad (j=1, \dots, J)(k=1, \dots, K) \quad (2.12)$$

$$\sum_{k=1}^K x_{ik} \leq d_i \quad (i=1, \dots, I) \quad (2.13)$$

Estes modelos são somente exemplos básicos desta classe de modelos, apresentados com o intuito de ilustrar os conceitos expostos. Segundo ASHAYERI et al. (1993), a maior utilização de modelos de mistura ótima na indústria se dá nas áreas alimentícias, químicas e petroquímicas.

2.2.2 Dietas de Mínimo Custo

O primeiro modelo matemático de formulação de dietas de mínimo custo foi apresentado por STIGLER (1945). Seu objetivo, no entanto, estava mais ligado ao valor mínimo da função objetivo do que à composição da dieta propriamente dita. STIGLER (1945) buscava modelar o custo mínimo de subsistência alimentar, isto é, o valor mínimo diário que uma pessoa média (ele usa seus próprios dados como base

para testar seu modelo) necessita para conseguir os nutrientes necessários a manutenção saudável de sua vida.

O modelo de STIGLER (1945) escolhia uma composição ótima entre 77 alimentos que atendia a sete exigências nutricionais, incluindo calorias, proteínas, cálcio, ferro, vitamina A, ácido ascórbico, entre outras. O modelo possuía a estrutura do problema de mistura ótima simples apresentado no tópico anterior.

No entanto, as dietas prescritas pelo modelo não eram viáveis, apesar de atenderem todas as exigências nutricionais. A principal objeção às dietas geradas pelo modelo era que estas não atendiam requisitos de paladar.

A geração seguinte de modelos de formulação de dietas substituiu a proporção de alimentos individuais como variável de decisão por uma combinação de itens de cardápio, conforme descreve LANCASTER (1990). Outras modificações no modelo foram a utilização de múltiplos períodos e restrições de variabilidade mínima entre esses e maximização de preferências de alimentos pelos usuários.

Ao analisar o modelo de STIGLER (1945) e suas influências, GARRILLE; GASS (1999) notam que apesar de não ser capaz de gerar dietas adequadas para o ser humano, este mostrou-se bastante adequado para diversas aplicações envolvendo mistura de componentes, como a formulação de rações para animais.

2.2.3 Dietas de Mínimo Custo para Bovinos

Não se pretende apresentar aqui uma revisão completa a respeito da nutrição de ruminantes, dado que isto estaria muito além do escopo do trabalho. O que se pretende é apresentar alguns dos aspectos que devem ser considerados na formulação destas dietas e que serão usados no planejamento de materiais. A revisão abaixo foi realizada com materiais fornecidos pelo zootecnista responsável pela empresa.

SILVESTRE; ROSTAGNO (1983) comentam aplicações de programação linear em seu trabalho a respeito de balanceamento de rações para bovinos. O modelo apresentado por eles tem a forma de um modelo de mistura simples, com a adição de restrições para limitar a quantidade máxima de determinados componentes e nutrientes.

Os nutrientes observados na composição de dietas para bovinos podem ser divididos da seguinte forma:

- **Energia:** é a base de qualquer ração e, se não suficiente, torna sub-ótimo o aproveitamento de proteínas, vitaminas, elementos inorgânicos e aditivos. Os ruminantes podem utilizar a energia de carboidratos complexos, como celulose, humicelulose, pectina etc., além de alimentos consumidos pelos monogástricos como amido e açúcares. (SILVA, 1983)
- **Proteína:** as proteínas destacam-se, entre outras substâncias essenciais, pela amplitude de funções que desempenham no organismo, participando desde a estrutura do corpo até mecanismos complexos de transporte e metabolismo. Os ruminantes podem utilizar, além de proteínas de origem vegetal e animal, fontes de nitrogênio não protéico como a uréia, ácido úrico (cama de aves), biureto e outras. (FERREIRA, 1983)
- **Minerais:** a dieta deve encontrar-se em uma faixa ótima de concentração mineral para que haja baixo índice de mortalidade e a taxa de crescimento seja satisfatória. Enquanto concentrações minerais abaixo da faixa ótima produzem resultados sub-ótimos, concentrações podem atingir um nível tóxico. Deve-se ter em vista que o gado ingere uma quantidade determinada de sal comum por dia, logo a quantidade de ração consumida diariamente é determinada pela concentração de sal nesta. (SOUZA, 1983)
- **Vitaminas:** as vitaminas do complexo B e K são produzidas no rúmen do bovino pelos microorganismos ali existentes, não havendo a necessidade da

inclusão destas nas dietas. Além disso, a vitamina C também é sintetizada nos tecidos do corpo dos ruminantes. Porém, as vitaminas A, D e E não são sintetizadas pelos ruminantes, e devem ser incluídas nas dietas para suprir deficiências nas pastagens em determinadas épocas do ano. (VELLOSO, 1983)

A unidade de medida utilizada para a quantidade de energia é a massa de nutrientes digestíveis totais (NDT), sendo que um quilograma de NDT equivale a 4,41 Mcal, e a unidade prática para sua mensuração é a percentagem de NDT sobre a massa do alimento. A unidade de medida utilizada para quantidade de proteína digestível é a massa, e o critério prático para mensuração é a percentagem da massa do alimento.

Além das restrições de atendimento a estes requisitos nutricionais, o modelo também deve considerar os seguintes limitantes, segundo SILVESTRE; ROSTAGNO (1983):

- **Densidade:** são realizadas considerações a respeito do volume diário que pode ser ingerido por um boi devido a restrições físicas do animal para ingerir quantidade suficiente da ração.
- **Toxicidade:** existem determinados alimentos que não podem superar determinada porcentagem da ração devido a presença de substâncias tóxicas. Um exemplo é o uso da torta de mamona nas rações: a proteína extraída da mamona apresenta um componente tóxico que é a ricina.
- **Palatabilidade:** determinados alimentos possuem baixo grau de aceitação pelo animal como, por exemplo, a farinha de peixe.

Uma forma de tratar limitantes como densidade é a classificação dos alimentos em grupos ou tipos, como energéticos e protéicos, e a limitação do percentual de cada tipo de alimento na ração.

2.3. Modelagens de planejamento de produção com minimização de custos de formulação

Existem, na literatura, descrições de modelos de planejamento de produção que incorporam características particulares de indústrias cujos produtos não possuem uma composição fixa determinada, mas podem assumir inúmeras composições alternativas, desde que sejam respeitadas determinadas restrições. Em tais modelos, além das tradicionais variáveis de decisão, figuram também as composições de cada produto final.

Neste tópico serão apresentadas duas formas de modelagem deste problema: modelos separados e integrados de planejamento agregado e composição ótima.

2.3.1 Modelos separados de planejamento agregado e composição ótima

A primeira forma de incorporar o problema da composição ótima no processo de planejamento agregado é via a modelagem separada da composição de mínimo custo, e posterior incorporação da composição resultante no modelo de planejamento.

SCHUSTER; ALLEN (1998) fornecem um exemplo desta forma adotado na Welch's, fabricante de produtos alimentícios à base de uvas. Inicialmente, a empresa contava com um sistema MRP para realizar a gestão da matéria-prima, porém não havia nenhuma funcionalidade no sistema para calcular receitas a um custo ótimo baseadas na matéria-prima disponível na planta e restrições de capacidade.

O modelo desenvolvido tomava como base informações da demanda, de custos (a partir do sistema de custos existente na firma), de matéria-prima existente e da localização destas. A saída consistia na composição mensal de mínimo custo para cada produto por um horizonte de doze meses, que servia de entrada no sistema MRP da empresa.

Esta forma de incorporar a questão da composição ótima tende a gerar problemas lineares, porém deixa de considerar as interações entre as composições dos produtos e as demais variáveis de planejamento.

2.3.2 Modelos integrados de planejamento agregado e composição ótima

A segunda forma mencionada de tratar os problemas de planejamento agregado e composição ótima, consiste em compor um só modelo que contemple as duas questões. A literatura fornece alguns exemplos deste tipo de modelo, como em MUNHOZ; MORABITO (2001). O trabalho apresenta um modelo de programação linear para a análise de um sistema de produção e distribuição de suco concentrado congelado de laranja.

O modelo possui a mesma estrutura básica que o modelo matemático de SANTORO (2005) apresentado no tópico sobre planejamento agregado, porém contempla tanto produtos acabados (sucos) quanto matérias-primas (bases). A transformação de matérias-primas em produtos acabados é feita mediante fórmula calculada pelo próprio modelo, obedecendo a restrições de qualidade.

As restrições de balanceamento de bases (matérias-primas) têm a seguinte estrutura:

$$EB_{jt} = EB_{jt-1} + D_{jt} - \sum_{p=1}^P E_{jpt} \quad (j=1, \dots, J)(t=1, \dots, T) \quad (2.14)$$

As variáveis EB_{jt} representam o estoque de bases j no período t , e as variáveis E_{jpt} representam as quantidades das bases j misturadas no período t e armazenadas no tanque interno p . O parâmetro D_{jt} é a disponibilização da base j no período t . A mistura das bases é determinada através de equações com a seguinte estrutura, típicas de problemas de mistura ótima:

$$\sum_{j=1}^J \alpha_j \cdot E_{jpt} \leq \alpha_p^{\max} \cdot \sum_{j=1}^J E_{jpt} \quad (p=1,\dots,P)(t=1,\dots,T) \quad (2.15)$$

$$\sum_{j=1}^J \alpha_j \cdot E_{jpt} \geq \alpha_p^{\min} \cdot \sum_{j=1}^J E_{jpt} \quad (p=1,\dots,P)(t=1,\dots,T) \quad (2.16)$$

O parâmetro α_j representa a especificação de *ratio* da base j , que é o fator que diferencia as bases entre si, tanto quanto os sucos. A mistura final contida no tanque p deve ter um *ratio* entre α_p^{\min} e α_p^{\max} , e o *ratio* de uma mistura é a composição linear do *ratio* de seus componentes. As fórmulas de cada suco em cada período, a partir das bases, podem ser descritas do seguinte modo:

$$FOR_{jpt} = \frac{E_{jpt}}{\sum_{j=1}^J E_{jpt}} \quad (j=1,\dots,J)(p=1,\dots,P)(t=1,\dots,T) \quad (2.17)$$

Como a determinação da fórmula dá-se via as equações (2.15) e (2.16), a expressão não-linear da fórmula acima não é utilizada explicitamente no modelo, o que permite que este se mantenha linear.

2.4. Programação Bilinear Generalizada

A programação bilinear generalizada (PBLG) é freqüentemente utilizada para a modelagem de sistemas encontrados na indústria química, petroquímica e alimentícia, onde determinadas substâncias químicas são sucessivamente misturadas em tanques intermediários para a obtenção das propriedades desejadas, segundo AUDET et al. (2004).

Uma revisão dos modelos de PBLG pode ser encontrada em AL-KHAYYAL (1992). São denominados modelos de PBLG aqueles que podem ser escritos na seguinte forma:

$$\text{minimizar} \quad c_0^T x + x^T A_0 y + d_0^T y \quad (2.18)$$

$$\text{sujeito à} \quad c_i^T x + x^T A_i y + d_i^T y \leq b_i \quad (2.19)$$

onde

$$x \in R^m, y \in R^n$$

$$b_i \in R, c_i \in R^m, d_i \in R^n, A_i \in R^{m \times n}$$

O modelo de PBLG difere do modelo de programação bilinear simples pelo fato deste último possuir somente restrições lineares. Conforme ressalta AL-KHAYYAL (1992), esta formulação engloba inclusive os modelos de programação quadrática com restrições quadráticas, já que as restrições da forma $c^T x + x^T Qx \leq b$ são equivalentes ao par de restrições bilinear e linear $x^T y \leq b$ e $-Qx + y = c$.

A função objetivo do PBLG não é convexa ou côncava, e a região viável não é convexa e pode ainda ser desconexa, tornando o problema de difícil resolução, conforme argumenta AUDET et. al. (2004).

A obtenção de soluções globais ótimas para o PBLG constitui um problema *NP-hard*, e sua complexidade está presente em dois níveis, segundo AUDET et. al. (2000): encontrar uma solução viável e otimizar a função quadrática.

Alguns autores propuseram métodos para a determinação de uma solução global ótima e em tempo finito para o PBLG, como AUDET et al. (2000) e LINDEROTH (2005). A abordagem de ambos é semelhante:

- um problema linear é formado a partir da relaxação do PBLG;

- este problema é resolvido, e sua solução torna-se um teto para o máximo global possível;
- caso a solução do problema linear relaxado não atenda às restrições do PBLG original, o problema é subdividido em problemas menores, cujos espaços viáveis sejam mutuamente exclusivos e sua união cubra o espaço viável do problema original. Para cada um destes sub-problemas, repete-se todo o procedimento desde o primeiro passo;
- caso a solução do problema linear relaxado atenda às restrições do PBLG original, e caso todos os sub-problemas tenham sido resolvidos ou descartados por possuírem soluções inferiores do que as previamente obtidas, o algoritmo dá-se por encerrado.

No entanto, dada a complexidade do problema, AUDET et al. (2000) acredita que a obtenção de um algoritmo otimizante que possa ser resolvido num espaço de tempo viável, está fora de alcance.

Por este motivo, o estudo de heurísticas eficientes torna-se de suma importância para as aplicações do PBLG. Algumas das heurísticas encontradas na literatura serão discutidas a seguir.

2.4.1 Solução por programação linear seqüencial

A programação linear seqüencial (PLS) é um método pelo qual um problema não-linear é resolvido via uma série de problemas lineares que aproximam a função objetivo e as restrições do problema original.

A primeira publicação a respeito de PLS foi em GRIFFITH; STEWART (1961), em uma aplicação para a refinaria Shell realizada em 1959. Segue uma descrição da utilização do método para o seguinte problema não-linear genérico:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^n c_{0j} x_j + g_0(y_1, y_2, \dots, y_k) \quad (2.20)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + g_i(y_1, y_2, \dots, y_k) = b_i \quad (2.21)$$

$$L_i \leq y_i \leq U_i \quad (2.22)$$

$$x_j \geq 0 \quad (2.23)$$

onde c_{ij} são constantes para $i \in \{0, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$; b_i são constantes para $i \in \{1, \dots, m\}$; x_j são variáveis lineares para $j \in \{1, \dots, n\}$; y_i são variáveis não-lineares para $i \in \{1, \dots, k\}$; e $g_i(y_1, y_2, \dots, y_k)$ são funções não lineares para $i \in \{1, \dots, m\}$.

Através de expansões de Taylor de primeira ordem, as funções $g_i(y_1, y_2, \dots, y_k)$ são linearizadas para um dado ponto $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_k^0)$ no espaço viável. Como o erro entre a aproximação gerada pela expansão de Taylor e a função original cresce conforme a distância de $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_k^0)$, são adicionados limites móveis nas variáveis não-lineares (y_1, y_2, \dots, y_k) , que determinam o passo máximo que a solução pode variar, antes de ser re-linearizada.

O problema linear pode ser escrito da seguinte forma:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^n c_{0j} x_j + g_0(y_1^0, \dots, y_k^0) + \sum_{r=1}^k (y_r - y_r^0) \frac{\partial g_0(y_1^0, \dots, y_k^0)}{\partial y_r} \quad (2.24)$$

$$\text{sujeito à} \quad \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + g_i(y_1^0, \dots, y_k^0) + \sum_{r=1}^k (y_r - y_r^0) \frac{\partial g_i(y_1^0, \dots, y_k^0)}{\partial y_r} \quad (2.25)$$

$$L_i \leq y_i \leq U_i \quad (2.26)$$

$$y_i^0 - LM_i \leq y_i \leq y_i^0 + LM_i \quad (2.27)$$

$$x_j \geq 0 \quad (2.28)$$

O problema foi colocado em uma forma que pode ser resolvida por meio de programação linear. A solução gerada a partir de uma iteração deste programa linear é utilizada como ponto de partida para a próxima iteração.

GRIFFITH; STEWART (1961) afirmam que a PLS garante uma solução ótima somente nos casos em que o espaço viável for convexo, a função objetivo for côncava, e tanto as restrições quanto a função objetivo possuam derivadas parciais de primeira ordem. No entanto, apesar dos problemas de PBLG não cumprirem com estes requisitos, a PBL foi utilizada em diversas aplicações na indústria para resolver modelos deste tipo, segundo relato de AUDET et al. (2004). Alguns dos fatores para o sucesso do método são a habilidade da PLS de utilizar rotinas existentes para a resolução de sistemas lineares e a capacidade para lidar com problemas grandes.

2.4.2 Solução por heurística alternada

Esta heurística, descrita por AUDET et al. (2004), consiste na divisão do problema de PBLG em dois problemas mais simples, que são otimizados alternadamente, e a solução ótima de um dos sub-problemas torna-se parâmetro do outro sub-problema.

As variáveis x_0, \dots, x_m e y_0, \dots, y_n de um problema de PBLG podem ser divididas em dois grupos: variáveis lineares e não-lineares. As variáveis não-lineares podem ser ainda divididas em dois subgrupos: as variáveis não-lineares x_i e variáveis não-lineares y_i . Esta partição é útil no sentido de que sempre que um dos dois subgrupos de variáveis não-lineares é fixado, o problema de PBLG torna-se linear, devido ao fato de que toda e qualquer não-linearidade presente nele é da forma $a_{ij}x_iy_j$.

Por questões de conveniência, $l = (l_1, \dots, l_p)$ é definido como o vetor das p variáveis lineares, onde l_i representa a i-ésima variável linear; $nl^1 = (nl_0^1, \dots, nl_q^1)$ é definido como o vetor das q variáveis não lineares x , onde nl_i^1 é a i-ésima variável não-linear do vetor x ; por fim, $nl^2 = (nl_0^2, \dots, nl_r^2)$ é definido como o vetor das r variáveis não lineares y , onde nl_i^2 é a i-ésima variável não-linear do vetor y .

A partir deste novo agrupamento de variáveis, o problema de PBLG pode ser subdividido em dois subproblemas lineares, representados por $\phi_{nl^1}(nl^2, l)$ e $\phi_{nl^2}(nl^1, l)$. O primeiro subproblema é o problema linear resultante da fixação das variáveis nl^1 , enquanto o segundo é resultante da fixação das variáveis nl^2 .

A heurística alternada consiste nos seguintes passos:

- 1) gerar uma solução viável inicial para as variáveis nl^1 ;
- 2) resolver o sistema linear $\phi_{nl^1}(nl^2, l)$;
- 3) se não houve alteração em nl^2 , parar;
- 4) resolver o sistema linear $\phi_{nl^2}(nl^1, l)$;
- 5) se não houve alteração em nl^1 , parar;
- 6) voltar para o passo 2.

AUDET et al. (2004) demonstra que este algoritmo converge para um ótimo local, uma vez que a solução sucessiva dos problemas lineares $\phi_{nl^1}(nl^2, l)$ e $\phi_{nl^2}(nl^1, l)$ geram uma seqüência monotônica de soluções com funções objetivos melhores.

Da mesma forma que a PLS, a heurística alternada não garante a convergência para um ótimo global. Um ponto positivo que ambas compartilham é a possibilidade de implementá-las utilizando-se de programação linear.

3. DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS

Neste capítulo são apresentados os dois modelos desenvolvidos com base na revisão bibliográfica e nos problemas encontrados na empresa: o modelo de planejamento agregado e o modelo de programação.

No primeiro tópico, são apresentados o modelo de planejamento agregado, sua formulação matemática e algoritmos heurísticos para sua resolução. Em seguida, são exibidos os testes realizados nos algoritmos de solução para determinação do algoritmo mais apropriado a ser utilizado no sistema. Ao fim, há o modelo responsável pela programação diária da produção.

3.1. Modelo de Planejamento Agregado

O modelo de planejamento agregado proposto consiste no planejamento de produção, estoques de famílias de produto acabado, formulação, estoques de matérias-primas e compra de matérias-primas ao médio prazo. O horizonte de planejamento selecionado para a empresa é de oito meses, com revisão periódica mensal para ajuste dos planos devido à variação nas previsões efetuadas. Nos modelos com sazonalidade, é recomendado que o horizonte de planejamento cubra um ciclo sazonal completo, de doze meses neste caso. Porém, uma vez que as matérias-primas e produtos apresentam obsolescência de seis e quatro meses, não é possível constituir estoques de longo prazo, o que deixaria sem sentido um planejamento tão longo.

Esquematicamente, o modelo de planejamento agregado proposto pode ser representado da seguinte forma:

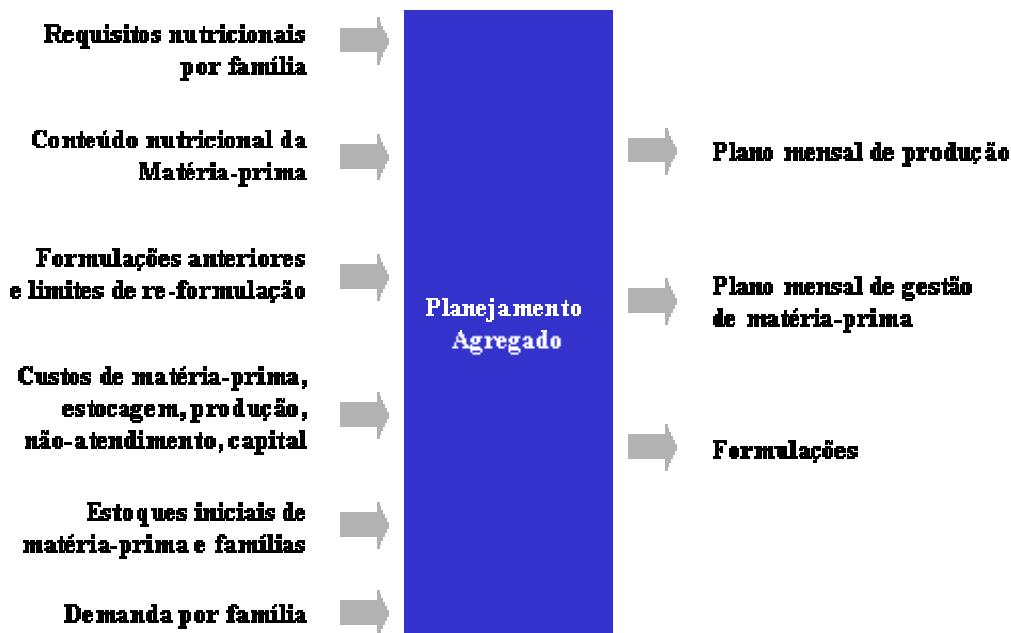


Figura 3.1: Modelo de planejamento agregado proposto

Segue uma descrição das entradas do modelo:

- **Requisitos nutricionais:** todas as propriedades nutricionais a serem atendidas pela família de produtos, como limites mínimos de energia, proteína, tipos de alimentos; e limites máximos de alimentos que em grande quantidade tornam-se tóxicos.
- **Conteúdo nutricional da matéria-prima:** informações relativas a quantidade da cada nutriente relevante nas matérias-primas que são candidatas para composição dos produtos.
- **Formulações anteriores e limites de re-formulação:** como a reformulação total das famílias só pode ser realizada em períodos de baixa demanda, o modelo deve limitar-se a escolher formulações com variações determinadas em relação aos períodos anteriores.

- **Custos de matérias-primas, estocagem, produção e não-atendimento:** custos ligados a matérias-primas, como compra, estocagem, custo de capital imobilizado no estoque; e custos ligados ao produto final, como mão-de-obra (hora normal e hora extra) utilizada na produção, custo de estocagem, custo de capital imobilizado no estoque, custo de não-atendimento da demanda.
- **Estoques:** níveis de estoques de matéria-prima e produto acabado existentes no momento do planejamento.
- **Demandas:** demanda prevista para todos os períodos do horizonte de planejamento.

As saídas do modelo são:

- **Plano Agregado de Produção:** quantidades a serem produzidas e estocadas de cada família nos oito meses subseqüentes ao planejamento, bem como o número de horas-homem de trabalho necessárias para esta produção, discriminadas por tipo (normal, extra ou temporária).
- **Plano de Compra de Matérias-Primas:** quantidade de cada matéria-prima a ser comprada nos oito meses subseqüentes ao planejamento.
- **Formulações:** para cada família, é gerada uma formulação que minimiza os custos do atendimento dos requisitos nutricionais básicos. Essa formulação básica é complementada com vitaminas e suplementos minerais na etapa de desagregação de famílias em produtos.

3.1.1 Modelo de Planejamento Agregado (MPA)

O modelo de planejamento agregado proposto contempla numa mesma formulação matemática, as questões relativas às decisões de utilização da capacidade produtiva e mão-de-obra, determinação de fórmulas, compras de matérias-primas e permissão para o não-atendimento da demanda.

Os produtos são agregados em famílias com níveis semelhantes de energia e proteína. Os outros requisitos (minerais, vitaminas) são determinados no momento de formulação dos produtos individuais. As fórmulas geradas pelo modelo contêm um elemento denominado “núcleo mineral e vitamínico”, que deve ter percentual fixo nas formulações finais. Este elemento não tem valor energético ou protéico, e será substituído por minerais e vitaminas apropriadas para cada cliente durante o processo de formulação dos produtos a partir das famílias.

O modelo matemático considera simultaneamente o problema de planejamento e de mistura ótima, como o modelo de MUNHOZ; MORABITO (2001), porém ao contrário deste, a utilização explicita das variáveis de formulação torna o modelo não-linear. O modelo também incorpora restrições de obsolescência de materiais via limitação dos estoques destes à quantidade a ser consumida.

A formulação matemática deste modelo encontra-se a seguir:

Índices

i	=	Famílias de produtos	$(i = 1, \dots, I)$
j	=	Matérias-primas	$(j = 1, \dots, J)$
t	=	Períodos (meses)	$(t = 1, \dots, T)$

Parâmetros

ce	=	Custo de estoque (manuseio)	[R\$/ton]
------	---	-----------------------------	-----------

cc	=	Custo de capital	[% a.a.]
cf_i	=	Custo de falta da família i	[R\$/ton]
c_{jt}	=	Custo da matéria prima j no período i	[R\$/ton]
cem_j	=	Custo de estoque da matéria-prima j	[R\$/ton]
chn	=	Custo horário de mão-de-obra em período normal	[R\$/h]
che	=	Custo horário de mão-de-obra em período extra	[R\$/h]
cht	=	Custo horário de mão-de-obra temporária	[R\$/h]
E_{i0}	=	Estoque inicial da família i	[ton]
EM_{i0}	=	Estoque inicial da matéria-prima j	[ton]
h	=	Horas de mão-de-obra necessárias para produção de uma tonelada de produtos	[ton/h]
hn_max	=	Capacidade de horas normais de mão-de-obra	[h]
he_max	=	Capacidade de horas extras de mão-de-obra	[h]
ht_max	=	Capacidade de horas para mão-de-obra terceira	[h]
e_max	=	Capacidade de estocagem	[ton]
for_{ij}^-	=	Límite inferior da matéria-prima j na família i	[%]
for_{ij}^+	=	Límite superior da matéria-prima j na família i	[%]
en_j	=	Quantidade de energia na matéria-prima j	[% NDT]
pr_j	=	Quantidade de proteínas na matéria-prima j	[% PB]
$tipo_j^1$	=	Assume valor 1 se matéria-prima é tipo 1	[-]
$tipo_j^2$	=	Assume valor 1 se matéria-prima é tipo 2	[-]
en_min_i	=	Mínimo de energia para família i	[% NDT]
pr_min_i	=	Mínimo de proteínas para família i	[% PB]
$tipo1_max_i$	=	Porcentagem máxima de alimentos tipo 1 na família i	[%]
$tipo2_max_i$	=	Porcentagem máxima de alimentos tipo 2 na família i	[%]
u_max_i	=	Porcentagem máxima de uréia na família i	[%]
nmv_i	=	Porcentagem de núcleo mineral e vitamínico na família i	[%]
O	=	Obsolescência das famílias	[períodos]

$$OM = \text{Obsolescência das matérias-primas} \quad [\text{períodos}]$$

Variáveis de decisão

E_{it}	=	Estoque da família i no final do período t	[ton]
F_{it}	=	Demanda não atendida da família i no período t	[ton]
P_{it}	=	Produção da família i no período t	[ton]
A_{ji}	=	Aquisição da matéria-prima i no período t	[ton]
EM_{jt}	=	Estoque da matéria-prima j no final do período t	[ton]
HN_t	=	Horas normais de mão-de-obra utilizadas no período t	[h]
HE_t	=	Horas extras de mão-de-obra utilizadas no período t	[h]
HT_t	=	Horas de mão-de-obra temporária utilizada no período t	[h]
C_{jt}	=	Consumo de matéria-prima j no período t	[ton]
FOR_{jt}	=	Percentual de matéria-prima j na família i	[%]

Modelo matemático

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \left\{ \left[ce + \left(chn \cdot h + \sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot c_{jt} \right) \cdot cc \right] \cdot E_{it} + cf_i \cdot F_{it} \right\} + \\
& + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \left[c_{jt} \cdot A_{jt} + (ce + C_{jt} \cdot cc) \cdot EM_{jt} \right] + \\
& + \sum_{t=0}^T (chn \cdot HN_t + che \cdot HE_t + cht \cdot HT_t)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\text{sujeito a} \quad E_{it} = E_{it-1} + P_{it} - d_{it} + F_{it} \quad (i=1, \dots, I)(t=1, \dots, T) \tag{3.2}$$

$$EM_{jt} = EM_{jt-1} + A_{jt} - C_{jt} \quad (j=1, \dots, J)(t=1, \dots, T) \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^I P_{it} \cdot h = HN_t + HE_t + HT_t \quad (t=1,\dots,T) \quad (3.4)$$

$$HN_t \leq hn_max \quad (t=1,\dots,T) \quad (3.5)$$

$$HE_t \leq he_max \quad (t=1,\dots,T) \quad (3.6)$$

$$HT_t \leq ht_max \quad (t=1,\dots,T) \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^I E_{it} + \sum_{j=1}^J EM_{jt} \leq e_max \quad (t=1,\dots,T) \quad (3.8)$$

$$C_{jt} = \sum_{i=1}^I FOR_{ij} \cdot P_{it} \quad (j=1,\dots,J) \quad (3.9)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ji} = 1 \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.10)$$

$$for_{ji}^- \leq FOR_{ij} \leq for_{ji}^+ \quad (j=1,\dots,J)(i=1,\dots,I) \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot en_j \geq en_min_i \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot pr_j \geq pr_min_i \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.13)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot tipo_j^1 \leq tipo_max_j^1 \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.14)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot tipo_j^2 \leq tipo_max_j^2 \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.15)$$

$$FOR_{i1} = nmv_i \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.16)$$

$$FOR_{i2} \leq u_max_i \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.17)$$

$$E_{it} \leq \sum_{t'=t}^O P_{it'} \quad (t=1,\dots,T-O) \quad (3.18)$$

$$EM_{it} \leq \sum_{t'=t}^{OM} C_{jt'} \quad (t=1,\dots,T-OM) \quad (3.19)$$

Todas as variáveis de decisão devem ser não-negativas

A função-objetivo (equação 3.1) é a minimização dos custos de estocagem e capital imobilizado, tanto de matérias-primas quanto de produtos acabados, custos de não-atendimento de receitas, custos de mão-de-obra, custos de matérias-primas e outros custos associados com produção. O custo de capital imobilizado em matérias-primas é o custo de reposição da matéria multiplicado pelo custo de capital mensal. O custo de estocagem de famílias é o custo de reposição de suas matérias-primas componentes somados ao custo do número de horas normais para sua fabricação, multiplicado pelo custo de capital mensal. O cálculo do custo de estocagem torna a função-objetivo **não-linear**.

As equações (3.2) e (3.3) são equações de balanceamento de famílias e matérias-primas respectivamente. No caso de famílias, permite-se a falta de atendimento à demanda, porém esta acarreta em perda total da demanda não-atendida. Não é permitida falta de matérias-primas.

A equação (3.4) divide as horas de mão-de-obra necessárias para produção do período em mão-de-obra trabalhando em período normal, mão-de-obra trabalhando em horas extras, e mão-de-obra temporária. Os limites para utilização destas estão nas inequações (3.5) a (3.7).

A inequação (3.8) limita o estoque de famílias e matérias-primas à capacidade disponível.

A equação (3.9) calcula o consumo em cada período de cada matéria-prima baseando-se na sua composição nas famílias. Deve-se notar que esta equação é **não-linear**, que juntamente com a função objetivo, caracterizam este problema como PBL.

A equação (3.10) faz com que as porcentagens de todas matérias-primas contidas em qualquer família totalize 100%, e a inequação (3.11) impõe limites na variação da formulação.

As inequações e equações (3.12) a (3.17) limitam as formulações possíveis àquelas que atendam os requisitos nutricionais de cada família, incluindo as quantidades mínimas de energia e proteína, as quantidades máximas de tipos de alimentos, a quantidade máxima de uréia e a quantidade exata de sal.

Por fim, as inequações (3.18) e (3.19) limitam o estoque de famílias e matérias-primas com o fim de evitar a obsolescência de produtos. O estoque de matérias-primas e famílias num dado mês deve ser inferior ao consumo planejado destas, antes da obsolescência.

3.1.2 Solução por Modelo Hierárquico (MH)

O modelo hierárquico é, dentre os modelos propostos para a solução do MPA, talvez o de entendimento mais intuitivo. A estratégia utilizada é a divisão do MPA em dois problemas, o primeiro de otimização da fórmula das famílias, e o segundo de planejamento agregado tradicional com dois níveis. Tal estratégia foi inspirada no modelo utilizado pelo fabricante de sucos Welch's, citado na revisão bibliográfica.

Uma questão importante neste modelo é determinar quais custos de matérias-primas serão utilizados na primeira etapa, uma vez que não se pode determinar quando estas serão compradas nesta etapa do modelo. Uma solução lógica seria a utilização de uma média, porém quanto maior for a variação dos preços de matérias-primas, pior será o desempenho do modelo. Outra possibilidade é a utilização da média da primeira metade do horizonte de planejamento, já que a matéria-prima pode ser comprada e estocada, conforme a estratégia atual da empresa.

Abaixo se encontram as formulações matemáticas dos modelos. Somente parâmetros que não constam do MPA, ou tiveram seu significado modificado, serão apresentados.

Etapa I - Minimização de custos de formulação

Parâmetros

$$c_j = \text{custo representativo da matéria-prima } j \quad [\text{R$/ton}]$$

Modelo

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (FOR_{ij} \cdot c_j) \quad (3.20)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^J FOR_{ji} = 1 \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.21)$$

$$for_{ji}^- \leq FOR_{ij} \leq for_{ji}^+ \quad (j=1, \dots, J)(i=1, \dots, I) \quad (3.22)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot en_j \geq en_min_i \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.23)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot pr_j \geq pr_min_i \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.24)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot tipo_j^1 \leq tipo_max_j^1 \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.25)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot tipo_j^2 \leq tipo_max_j^2 \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.26)$$

$$FOR_{i1} = nmv_i \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.27)$$

$$FOR_{i2} \leq u_max_i \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.28)$$

Todas variáveis de decisão devem ser não-negativas

A função objetivo (3.20) é a tradicionalmente encontrada em problemas de formulação de misturas de ótimo custo, enquanto que as restrições são idênticas às restrições (3.10) a (3.17) do MPA.

Etapa II – Planejamento Agregado

Parâmetros:

for_{ij} = Percentual de matéria-prima j na família i [%]

Modelo:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \left\{ \left[ce + \left(chn \cdot h + \sum_{j=1}^J for_{ij} \cdot c_{jt} \right) \cdot cc \right] \cdot E_{it} + cf_i \cdot F_{it} \right\} + \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \left[c_{jt} \cdot A_{jt} + (ce + C_{jt} \cdot cc) \cdot EM_{jt} \right] + \\ & + \sum_{t=0}^T (chn \cdot HN_t + che \cdot HE_t + cht \cdot HT_t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\text{sujeito a} \quad E_{it} = E_{it-1} + P_{it} - d_{it} + F_{it} \quad (i=1,\dots,I)(t=1,\dots,T) \quad (3.30)$$

$$EM_{jt} = EM_{jt-1} + A_{jt} - C_{jt} \quad (j=1,\dots,J) (t=1,\dots,T) \quad (3.31)$$

$$\sum_{i=1}^I P_{it} \cdot h = HN_t + HE_t + HT_t \quad (t=1,\dots,T) \quad (3.32)$$

$$HN_t \leq hn_max \quad (t=1,\dots,T) \quad (3.33)$$

$$HE_t \leq he_max \quad (t=1,\dots,T) \quad (3.34)$$

$$HT_t \leq ht_max \quad (t=1,\dots,T) \quad (3.35)$$

$$\sum_{i=1}^I E_{it} + \sum_{j=1}^J EM_{jt} \leq e_max \quad (t=1,\dots,T) \quad (3.36)$$

$$C_{jt} = \sum_{i=1}^I for_{ij} \cdot P_{it} \quad (j=1,\dots,J) \quad (3.37)$$

$$E_{it} \leq \sum_{t'=t}^O P_{it'} \quad (t=1,\dots,T-O) \quad (3.38)$$

$$EM_{it} \leq \sum_{t'=t}^{OM} C_{jt'} \quad (t=1,\dots,T-OM) \quad (3.39)$$

Todas variáveis de decisão devem ser não-negativas

Este modelo tem as mesmas restrições e função objetivo do MPA, exceto as restrições (3.10) a (3.17) que lidam com formulação, uma vez que isto já foi resolvido na etapa I, e a restrição não-linear (3.9) que torna-se linear, uma vez que for_{ij} torna-se parâmetro.

3.1.3 Solução pela Heurística Alternada (ALT)

A aplicação da heurística alternada no MPA consiste na criação de dois sub-problemas lineares, PL1 e PL2, ambos com a mesma estrutura de MPA, mas cada um destes com determinadas variáveis do problema original transformadas em parâmetros. As restrições que, após a fixação das variáveis, tornem-se restrições sem variáveis, podem ser eliminadas do modelo.

Abaixo encontram-se as variáveis de decisão de cada modelo:

Comuns: A_{jt}, C_{jt}, EM_{jt}

Exclusivas PL1: FOR_{ij}

Exclusivas PL2: $P_{it}, E_{it}, F_{it}, HN_t, HE_t, HT_t$

Pode-se perceber que, uma vez que P_{it} e FOR_{ij} são variáveis exclusivas dos modelos PL1 e PL2 respectivamente, e que ambos tem a mesma estrutura de MPA, os dois são necessariamente lineares.

A lógica da heurística consiste em resolver alternadamente os modelos, utilizando o resultado obtido de um, como parâmetro de entrada no outro. O critério de parada é a diferença absoluta no valor de duas soluções menores que um dado valor pré-determinado, ou um número máximo de iterações, por segurança. Neste caso, foi selecionado como erro aceitável diferenças inferiores a um real, e o número máximo de iterações foi fixado em quinze.

Para iniciar o processo, é necessária uma primeira solução viável. Neste caso, será utilizada uma solução trivial onde a produção de cada família em cada período é igual a um mesmo número, e o primeiro modelo a ser resolvido é PL2. A escolha desta semente inicial deve-se ao fato de que é sempre viável, uma vez que o volume de produção é pequeno, fornece ao PL2 algum volume de produção, possibilitando que o custo destes produtos seja reduzido. Caso um volume de produção nulo seja enviado em todos os períodos para PL2, uma melhora da formulação não causará impacto na sua função objetivo. Já a escolha de PL2 como

primeiro modelo a ser executado, advém da simplicidade para encontrar soluções intuitivas viáveis para PL1, o que não ocorre com PL2.

3.1.4 Solução via programação linear seqüencial (PLS)

A solução do MPA via programação linear seqüencial consiste na criação de um modelo linear que aproxima o modelo não-linear do MPA em determinado ponto do espaço viável, e consequente otimização sucessiva deste modelo para resolver o MPA.

O modelo linear é construído a partir da substituição da única restrição não-linear do MPA, e da função objetivo:

$$C_{jt} = \sum_{i=1}^I FOR_{ij} \cdot P_{it} \quad (j=1, \dots, J) \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \left\{ \left[ce + \left(chn \cdot h + \sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot c_{jt} \right) \cdot cc \right] \cdot E_{it} + cf_i \cdot F_{it} \right\} + \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J [c_{jt} \cdot A_{jt} + (ce + C_{jt} \cdot cc) \cdot EM_{jt}] + \\ & + \sum_{t=0}^T (chn \cdot HN_t + che \cdot HE_t + cht \cdot HT_t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

por suas expansões de Taylor de primeira ordem: ($for_{ij}^0, e_{it}^0, p_{it}^0$ são parâmetros do modelo linearizado, representando os pontos a partir dos quais as aproximações são feitas)

$$A_{jt} = \sum_{i=1}^I (for_{ij}^0 \cdot P_{it} + FOR_{ij} \cdot p_{it}^0 - for_{ij}^0 \cdot p_{it}^0) \quad (j=1, \dots, J) \quad (3.40)$$

e

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \{ [ce + (chn \cdot h +) \cdot cc] \cdot E_{it} + cf_i \cdot F_{it} \} + \\
& + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J [c_{jt} \cdot A_{jt} + (ce + C_{jt} \cdot cc) \cdot EM_{jt}] + \\
& + \sum_{t=0}^T (chn \cdot HN_t + che \cdot HE_t + cht \cdot HT_t) + \\
& \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \left[\left(\sum_{j=1}^J for_{ij}^0 \cdot c_{jt} \cdot cc \right) \cdot E_{it} \right] + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \left[\left(\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot c_{jt} \cdot cc \right) \cdot e_{it}^0 \right] \\
& - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \left[\left(\sum_{j=1}^J for_{ij}^0 \cdot c_{jt} \cdot cc \right) \cdot e_{it}^0 \right]
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Além destas substituições, são adicionados também limites móveis, para que a solução não sofra grandes alterações numa única iterada, já que o erro da aproximação cresce com a distância de for_{ij}^0 e p_{it}^0 .

$$-lm \leq FOR_{ij} - for_{ij}^0 \leq lm \tag{3.42}$$

O algoritmo deve ser interrompido quando a variação no valor da função objetivo entre duas iterações for menor que um dado número, ou quando um determinado número de iterações tenham se decorrido. Para esta aplicação, foi selecionado o mesmo erro aceitável que em ALT, inferior a um real, e o número máximo de iterações foi limitado a quinze.

Ao contrário da ALT, neste método a solução inicial viável não é necessária, bastando que os limites móveis estejam grandes o suficiente (10% ou mais para 26 matérias-primas) na primeira iterada, de forma que o problema aproximado tenha solução viável. Isto não significa, no entanto, que o ponto de partida é irrelevante neste método. Pelo contrário, por ser uma busca local, o início com soluções diferentes pode levar a ótimos locais diferentes.

3.1.5 Geração de soluções iniciais aleatórias (RND)

As heurísticas de busca local ALT e PLS podem ser chamadas de métodos de intensificação, uma vez que estes focam sua busca em uma dada região do espaço viável, sem explorar o exterior desta. Para aumentar a eficácia da busca, pode-se combinar os métodos de busca local com métodos geradores de soluções iniciais, de forma que diferentes regiões do espaço viável sejam investigadas (método de diversificação).

A geração de soluções iniciais aleatórias é um destes métodos, produzindo fórmulas aleatórias, porém viáveis, que possam ser utilizadas como solução inicial do ALT ou PLS.

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

- **Geração:** Geração de uma matriz for_{ji}^0 , contendo valores positivos aleatórios de distribuição uniforme em todas as posições cujo índice j for diferente de 1. Nas posições de índice i igual a 1, armazenar a quantidade de sal especificada para a família i;
- **Normalização:** Divisão de cada número pela somatória dos números com mesmo índice i subtraídos da quantidade de sal que é determinada para esta família. Desta forma, a soma de todos os valores de determinado índice i deve totalizar 100%;
- **Correção:** ajustar as fórmulas contidas em for_{ji}^0 para que estas atendam aos requisitos nutricionais de cada família, tornando for_{ji}^0 uma solução viável. Este ajuste é realizado resolvendo-se o seguinte problema linear (para as variáveis e parâmetros não explicados, a descrição dada em 3.1.1 deve ser assumida):

Parâmetros:

$$for_{ji}^0 = \text{Matriz gerada aleatoriamente e normalizada}$$

Variáveis de Decisão

$$X_{ji} = \text{Valor a ser adicionado em } for_{ji}^0 \text{ para tornar as fórmulas viáveis}$$

$$Y_{ji} = \text{Valor a ser subtraído em } for_{ji}^0 \text{ para tornar as fórmulas viáveis}$$

Modelo matemático

$$\text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^J (X_{ji} + Y_{ji}) \quad (3.43)$$

$$\text{sujeito a} \quad FOR_{ji} = for_{ji}^0 + X_{ji} - Y_{ji} \quad (j=1, \dots, J)(i=1, \dots, I) \quad (3.44)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ji} = 1 \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.45)$$

$$for_{ji}^- \leq FOR_{ji} \leq for_{ji}^+ \quad (j=1, \dots, J)(i=1, \dots, I) \quad (3.46)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot en_j \geq en_min_i \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.47)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot pr_j \geq pr_min_i \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.48)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot tipo_j^1 \leq tipo_max_j^1 \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.49)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot tipo_j^2 \leq tipo_max_j^2 \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.50)$$

$$FOR_{i1} = nmv_i \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.51)$$

Todas variáveis de decisão devem ser não-negativas

$$FOR_{i2} \leq u_max_i \quad (i=1,\dots,I) \quad (3.52)$$

A função objetivo (3.43) consiste na minimização das alterações (adições e subtrações) em for_{ji}^0 . A restrição (3.44) adiciona ou subtrai valores de for_{ji}^0 , enquanto que as demais restrições são as restrições do MPA responsáveis pela formulação das famílias.

A partir da utilização desta heurística em conjunto com os procedimentos de busca local, formulam-se os modelos ALT-RND e PLS-RND.

3.1.6 Geração de soluções iniciais dispersas por procedimento determinístico (PD)

Este algoritmo, da mesma forma que o algoritmo anterior, pode ser utilizado para obter soluções iniciais para as heurísticas ALT e PLS. No entanto, a geração da solução inicial neste algoritmo, ao contrário do anterior, é determinística.

O algoritmo consiste na busca de soluções viáveis dispersas por meio da seleção de fórmulas que tenham o menor número de elementos em comum com soluções prévias.

A geração das soluções se dá pela resolução do seguinte problema linear:

Parâmetros:

$cont_{ij}$ = Número de vezes em que a matéria-prima j foi utilizada na formulação da família i em soluções anteriores

Modelo matemático:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J cont_{ij} \cdot FOR_{ij} \quad (3.53)$$

$$\text{sujeito à} \quad \sum_{j=1}^J FOR_{ji} = 1 \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.54)$$

$$for_{ji}^- \leq FOR_{ij} \leq for_{ji}^+ \quad (j=1, \dots, J)(i=1, \dots, I) \quad (3.55)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot en_j \geq en_min_i \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.56)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot pr_j \geq pr_min_i \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.57)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot tipo_j^1 \leq tipo_max_j^1 \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.58)$$

$$\sum_{j=1}^J FOR_{ij} \cdot tipo_j^2 \leq tipo_max_j^2 \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.59)$$

$$FOR_{i1} = nmv_i \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.60)$$

$$FOR_{i2} \leq u_max_i \quad (i=1, \dots, I) \quad (3.61)$$

Todas variáveis de decisão devem ser não-negativas

A função objetivo (3.53) visa a geração de fórmulas diversificadas por meio da penalização da inclusão de elementos que estiveram presentes com freqüência nas fórmulas anteriores. As restrições são as mesmas restrições do MPA para a formulação das famílias.

Deve-se ressaltar que é necessário o armazenamento da matriz $cont_{ij}$, e que a cada execução do método, esta deve ser atualizada. Além disto, esta também deve ser atualizada com as soluções encontradas nos procedimentos de busca local.

A combinação deste algoritmo com os procedimentos de busca local deste capítulo geraram as heurísticas ALT-PD e SLP-PD.

3.2. Testes comparativos entre métodos de solução

Os métodos de solução heurística apresentados no tópico anterior foram submetidos a testes comparativos, de forma que a escolha do melhor método em termos de qualidade da solução e tempo de processamento desta pudesse ser efetuada.

O objetivo dos testes não é investigar a eficiência das heurísticas em encontrar o ótimo global, uma vez que estas heurísticas já se mostraram úteis na resolução desta classe de problema, segundo a literatura consultada. O que se busca nos testes é a determinação da heurística mais apropriada para o modelo de planejamento agregado apresentado. Seria bastante interessante realizar uma comparação da eficácia dos planos gerados pelo modelo contra os planos históricos da empresa, mas a falta de dados disponíveis impede este teste.

Como as heurísticas podem ter desempenhos diferentes, dependendo de determinadas características dos parâmetros de entrada, foram geradas instâncias de testes com variações nos seguintes fatores:

- **Volatilidade dos preços de matérias-primas:** segundo a empresa, os preços de matérias-primas apresentam alta sazonal média de 20% devido a picos de consumo. Uma baixa volatilidade destes preços faz com que a proporção entre os preços não tenha grandes desvios, enquanto que uma alta volatilidade tenderia a gerar diferentes proporções de preço no tempo, tornando a resolução do modelo de planejamento agregado mais complexa.
- **Nível da demanda agregada:** a elevação dos níveis de demanda em épocas de alta sazonalidade torna mais complexa a resolução do modelo de planejamento agregado, pois força o modelo a tomar decisões de utilização de horas extras e temporárias, estocagem e mesmo permissão de não-atendimento da demanda.

Variações no *mix* de produtos não foram consideradas, uma vez que todos os produtos são processados nos mesmos equipamentos, com os mesmos roteiros e tempos de processamento por tonelada. Desta forma, a variação no *mix* de produção resultaria apenas em variações nos tipos de matérias-primas compradas.

As séries de custo utilizadas nas instâncias de teste foram geradas aleatoriamente, segundo um processo estocástico ARIMA(1,1,0), segundo descrição de HARVEY(1993):

$$\Delta \text{preço}_t = w_t = \theta_1 \cdot w_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{com} \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma) \quad (3.62)$$

A série w é gerada por um processo estocástico auto-regressivo AR(1), e pode ser demonstrado que para $|\theta_1| \leq 1$ a série é estacionária, isto é, a influência de um determinado elemento da série nos elementos seguintes torna-se cada vez mais insignificante, e os elementos da série gravitam ao redor do zero. Para que a média

dos elementos seja diferente de zero, pode-se definir uma série $y_t = w_t + \mu$, e realizar as substituições na fórmula (3.x):

$$\Delta\text{preço}_t = y_t = \theta_1 \cdot w_{t-1} + (1 - \theta_1) \cdot \mu + \varepsilon_t \quad (3.63)$$

com $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma)$

Para gerar as séries de preços, faz-se necessária a definição dos parâmetros θ_1 , μ e σ . O parâmetro θ_1 representa a persistência dos incrementos, e um valor alto neste parâmetro tende a deixar os incrementos de preço próximos a seus antecessores, enquanto que valores baixos deste parâmetro fazem com que os incrementos distribuam-se mais livremente em torno da média. Para a geração das séries de preço, θ_1 é fixado em 0.3, pois isso garante que não haverão variações muito bruscas nos incrementos, porém deixa espaço para o componente aleatório. O parâmetro μ é a média da distribuição dos incrementos, e será fixada de modo que a média de incremento total durante os oito períodos do modelo de planejamento agregado totalize 20%. Já o parâmetro σ representa a influência da componente aleatória na série, isto é, sua volatilidade. Foram fixados valores de meia média e de duas médias para σ , representando cenários de baixa e alta volatilidade respectivamente. Para cada configuração de volatilidade foram gerados três cenários, totalizando seis cenários para os custos de matérias-primas.

As séries de demandas foram geradas de forma determinística a partir das demandas efetivas do ano de 2004. Foram geradas três séries de demandas: demandas 20% inferiores às de 2004, demandas semelhantes às de 2004 e demandas 50% superiores às de 2004.

Os demais parâmetros do modelo foram ajustados segundo as informações coletadas na empresa. As oito famílias de produtos e suas exigências nutricionais encontram-se na tabela a seguir:

Tabela 3.1: Famílias de produtos e seus requisitos nutricionais

Família	Máximo Tipo 1	Máximo Tipo 2	Mínimo Energia	Mínimo Proteína	Máximo Uréia	Núcleo mineral e vitamínico
Proteinado 1	65%	45%	40%	28%	15%	8%
Proteinado 2	65%	45%	48%	33%	15%	8%
Proteinado 3	65%	45%	57%	37%	15%	8%
Proteinado 4	65%	55%	65%	42%	15%	8%
Semi-confinamento 1	65%	45%	40%	28%	4%	2%
Semi-confinamento 2	65%	45%	48%	33%	4%	2%
Semi-confinamento 3	65%	45%	57%	37%	4%	2%
Semi-confinamento 4	65%	55%	65%	42%	4%	2%

As matérias-primas utilizadas pela empresa, e seus componentes nutricionais, são:

Tabela 3.2: Matérias-primas e seus conteúdos nutricionais

Matéria-Prima	Classificação	Energia	Proteína
Algodão, farelo (prensado)	Tipo 2	86,0	39,6
Algodão, farelo (solvente)	Tipo 2	63,0	41,6
Algodão, farelo com casca	Tipo 2	52,0	28,0
Arroz, farelo	Tipo 1	60,0	13,5
Arroz, farelo desengordurado	Tipo 1	55,0	14,0
Arroz, quirela	Tipo 1	77,0	7,1
Citrus, farelo de polpa	Tipo 1	69,0	6,6
Girassol, farelo	Tipo 2	71,0	49,5
Girassol, farelo com casca	Tipo 2	0,0	41,0
Girassol, semente	Tipo 1	76,0	16,8
Leite desnatado em pó	Tipo 2	79,8	33,1
Levedo Biosaf (vivo)	Tipo 2	53,0	40,0
Levedura Inativa	Tipo 2	42,0	28,0
Milho desint.c/ palha e sabugo	Tipo 1	69,1	7,8
Milho desint.c/ sabugo	Tipo 1	73,0	8,1
Milho, gluten refinazil	Tipo 2	72,0	22,0
Milho, grão	Tipo 1	80,0	9,3
Núcleo Mineral e Vitamínico			
Soja descascada, farelo	Tipo 2	75,0	50,9
Soja, farelo	Tipo 2	73,0	45,0
Soja, semente	Tipo 2	87,6	37,9
Sorgo, graos	Tipo 1	72,0	11,0
Trigo, farelinho	Tipo 1	73,0	15,3
Trigo, farelo	Tipo 1	63,0	16,0
Trigo, gérmen	Tipo 2	80,0	27,3
Trigo, grãos	Tipo 1	80,0	12,7
Uréia	Tipo 2		262,0

A empresa tem dois operários que trabalham em tempo integral, e ainda pode contratar mais três operários em regime temporário para suprir os picos de produção. Os gastos da empresa com cada operário permanente são de R\$ 600,00 mensais,

incluindo nesta quantia o salário, os encargos e o bônus por produção. Já os gastos com operários temporários são de R\$ 450,00 em média por mês. Para fins de planejamento, a consideração do custo de horas normais dos operários permanentes deve ser limitada ao bônus de R\$150,00 reais mensais, que variam com a produção. Os demais gastos com estes operários são considerados custos fixos. As horas extras, no entanto, são consideradas como sendo o custo total de R\$ 600,00, aumentado em 50%. Considerando-se um mês com 20 dias úteis, e oito horas de jornada por dia, calcula-se os custos de mão-de-obra:

Tabela 3.3: Custos de mão-de-obra

Regime	Custo de Homem-Hora
Horas Normais	R\$ 0,94
Horas Extras	R\$ 5,63
Horas de Temporários	R\$ 2,81

O limite para o número de horas normais é de 280 homens-hora, que representa dois operários trabalhando 7 horas por dia útil. A hora restante para o turno de 8 horas é gasta com outras atividades que não a produção diretamente, como limpeza, estocagem e manutenção preventiva. O limite para as horas-extras é de 64 homens-hora, que representa 20% sobre as horas normais disponíveis de dois operários. Já o limite para as horas de funcionários temporários é de 480 homens-hora, isto é, três operários temporários. A produtividade dos operários é de meia tonelada de produto processada por homem-hora, não havendo grandes diferenças entre os funcionários temporários e permanentes.

Os custos de estocagem foram estimados junto à empresa como sendo R\$ 1 por mês por tonelada, além do custo de capital imobilizado que foi considerado como 25% ao ano, dado que a empresa usa de recursos próprios e sua alternativa de aplicação, no momento, seriam fundos de renda fixa com rendimento inferior a 17% ao ano. Considerando-se o risco de investir em capital de giro, estabeleceu-se a taxa de 25%.

O custo de falta foi estabelecido como quatro vezes a receita da demanda não-atendida, dadas as características do negócio. A receita por tonelada foi considerada como o preço médio de R\$ 840,00.

O número de testes realizados para cada uma das heurísticas foi 18, que corresponde às combinações de seis cenários de custo e três cenários de demanda. Os algoritmos de teste foram codificados no mesmo ambiente de programação e otimização que a solução implementada, descrita no capítulo 4. Os testes foram executados em um microcomputador *Pentium MMX*, com 32MB de memória RAM instalada, e sistema operacional *Windows 98*. A tabela a seguir contém a descrição dos modelos testados:

Tabela 3.4: Descrição dos modelos testados

Modelo	Descrição
ALT	Heurística alternada com solução inicial trivial
ALT-PD	Heurística alternada com soluções iniciais geradas por procedimento determinístico
ALT-RND	Heurística alternada com soluções iniciais geradas aleatoriamente
MH	Modelo hierárquico linear
PLS	Modelo de programação linear seqüencial com solução inicial trivial
PLS-PD	Modelo de programação linear seqüencial com soluções iniciais geradas por procedimento determinístico
PLS-RND	Modelo de programação linear seqüencial com soluções iniciais geradas aleatoriamente

Os resultados encontram-se na tabela a seguir, que indica em porcentagem quão superior foi o valor da função objetivo de cada heurística em relação à melhor solução:

Tabela 3.5: Diferença percentual entre o resultados das heurísticas e o melhor resultado encontrado

Cenários		Heurísticas						
Volatilidade	Demanda	ALT	ALT-PD	ALT-RND	MH	PLS	PLS-PD	PLS-RND
Baixa	Baixa	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	1,15%	1,15%	1,15%
	Média	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	1,15%	1,15%	1,15%
	Alta	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,14%	1,14%	1,14%
Alta	Baixa	0,00%	0,00%	0,00%	0,37%	0,36%	0,36%	0,36%
	Média	0,00%	0,00%	0,00%	0,32%	0,30%	0,30%	0,30%
	Alta	0,00%	0,00%	0,00%	0,33%	0,29%	0,29%	0,29%

É também interessante analisar os tempos de execução das heurísticas nos testes realizados:

Tabela 3.6: Tempos de execução das heurísticas

Cenários		Heurísticas						
Volatilidade	Demanda	ALT	ALT-PD	ALT-RND	MH	PLS	PLS-PD	PLS-RND
Baixa	Baixa	2,7s	8,0s	12,3s	1,3s	16,0s	48,0s	54,0s
	Média	3,0s	7,0s	11,7s	1,3s	19,0s	47,0s	61,0s
	Alta	3,0s	7,0s	12,0s	1,3s	20,0s	55,0s	66,0s
Alta	Baixa	2,7s	8,0s	14,3s	1,3s	16,7s	45,0s	57,7s
	Média	3,0s	8,7s	15,3s	1,3s	16,0s	46,0s	56,0s
	Alta	3,0s	8,7s	14,3	1,3s	16,0s	46,3s	58,0s

A partir dos testes realizados, pode-se notar que todas heurísticas apresentam resultados muito próximos em todos os cenários. Os tempos de execução, por outro lado, apresentam grandes variações.

O algoritmo heurístico MH é o de execução mais rápida, porém perde desempenho conforme aumenta a volatilidade dos custos ou a demanda aproxima-se dos limites de produção. O algoritmo PLS é o mais lento, tanto por tratar-se de um modelo matemático de maiores dimensões que MH e ALT, quanto por serem necessários um número maior de iterações para a convergência.

Em todos os casos estudados, os algoritmos que contém múltiplos inícios (ALT-PD, ALT-PD, PLS-RND, PLS-RND) não melhoraram o desempenho de suas heurísticas-base. Pode-se concluir que não é necessária a utilização deste tipo de heurística, podendo-se ater à heurística-base.

Com base nessas considerações, o método selecionado foi ALT, por ter se mostrado o mais robusto, com tempo de execução razoável e que gera modelos de otimização de tamanho inferior ao PLS, o que possibilita o planejamento de mais famílias e matérias-primas.

3.3. Modelo de Seqüenciação (MS)

Com execução diária, o modelo de seqüenciação (MS) deve gerar a lista de pedidos a serem produzidos no dia, de forma que a produção mensal atenda às metas estabelecidas pelo MPA.

Para determinar a ordem dos pedidos, o MS escolhe os pedidos com menor folga, se acordo com a fórmula abaixo:

$$Folga = t_{entrega} - \Delta t_{produção} - t_{hoje} \quad (3.64)$$

Desta forma, os pedidos com menor valor desta função são produzidos. Porém, como as metas de produção devem ser respeitadas, os pedidos de uma família só são executados até que a meta de produção desta família seja completada. Por outro lado, os pedidos dos meses seguintes podem ser adiantados, caso todos os pedidos do mês tenham sido produzidos e as metas de produção ainda não tenham sido cumpridas.

4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Este capítulo detalha a implementação dos modelos desenvolvidos no capítulo anterior em um sistema de informações e apoio à decisão para a Nutrinvest. As ferramentas e diagramas utilizados para detalhamento do desenho do sistema foram adaptados de PÁDUA (2001). Inicia-se com a exposição de usos de caso do sistema, passando por sua arquitetura, interfaces e terminando com suas classes de dados.

4.1. Casos de Uso

Para definir as funcionalidades presentes no sistema, serão apresentados os casos de uso deste, segundo a metodologia UML:

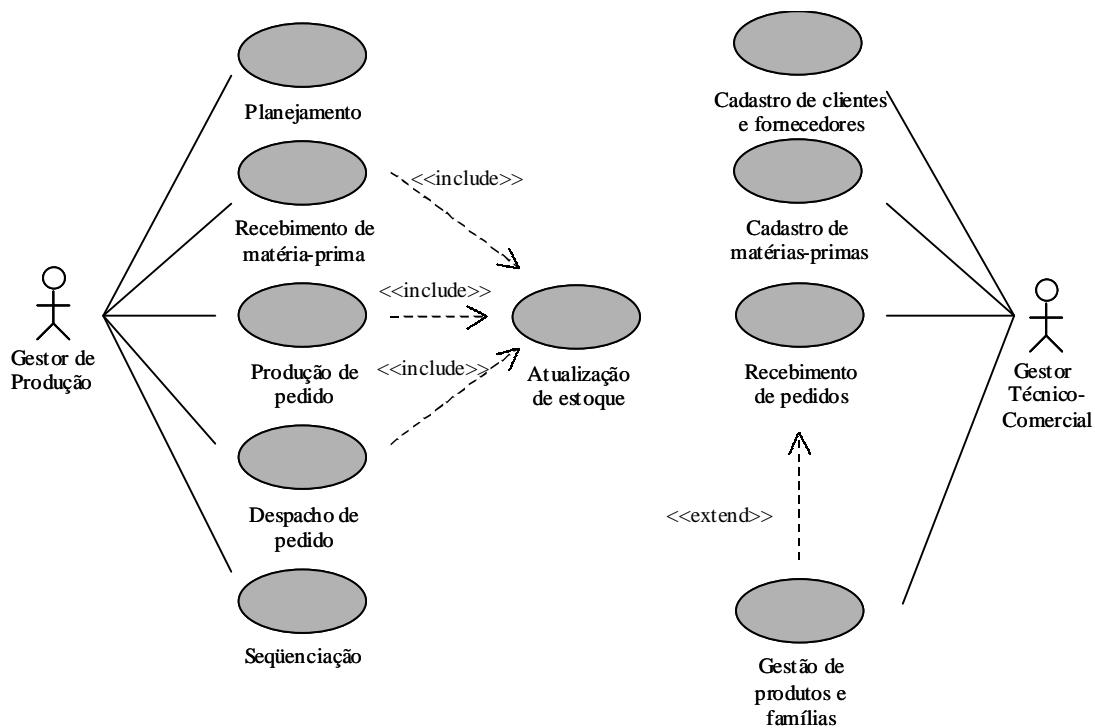


Figura 4.1: Casos de uso do sistema desenvolvido

A partir do diagrama acima, é possível compreender melhor como se dá o relacionamento entre os seus usuários e a que fim este sistema é acessado.

Dois atores têm contato com o sistema: o gestor de produção e o gestor técnico-comercial. O primeiro é responsável pelas atividades de processamento da matéria-

prima em produtos acabados, bem como por toda entrada e saída de material da empresa. O segundo está a cargo das vendas de produtos e formulação dos mesmos, atividades que se encontram fortemente ligadas na empresa. Apesar desta distinção, deve ficar claro que os atores não representam funcionários diferentes: no caso da Nutrinvest, os dois zootecnistas podem assumir o papel de ambos atores.

Segue uma descrição dos casos de uso apresentados:

- **Planejamento:** o gestor de produção executa as rotinas de planejamento, que a partir das previsões de demanda agregada para as famílias e de custos de matérias-primas, além de outros parâmetros relacionados a capacidades e custos, gera as metas mensais de produção e formulações de famílias, que serão usadas como base para formular os produtos.
- **Recebimento de material:** o gestor de produção registra a entrada de matéria-prima na empresa. Esse uso de caso inclui o uso de caso de atualização dos estoques, indicado no diagrama pela forma convencionada em UML, a seta pontilhada e a palavra “<<include>>”.
- **Produção de pedidos:** o gestor de produção realiza o apontamento de produção de pedidos no sistema, que aciona uma atualização dos estoques para subtrair as quantidades de matéria-prima utilizadas e a quantidade de produto produzida. O sistema aceita que um pedido contendo vários produtos não tenha todos seus produtos realizados em um único momento, e que um pedido grande possa ser produzido parcialmente.
- **Despacho de pedidos:** o gestor de produção aponta a saída de produto acabado e mesmo de matérias-primas que tenham sido vendidas e enviadas para o cliente. Neste caso, a atualização de estoques também é acionada. O despacho é ligado aos itens de um pedido, não ao pedido completo, o que possibilita que parte de um pedido seja despachada e outra parte ainda venha a ser produzida.

- **Seqüenciação:** o gestor de produção aciona diariamente o sistema para obter os pedidos a serem produzidos, bem como suas formulações. A seqüenciação é realizada de acordo com as metas de produção estabelecidas no planejamento agregado e com os critérios de priorização, como explicados no capítulo 3 (modelo MS).
- **Atualização do estoque:** as rotinas que envolvem entrada ou saída de material, ou ainda processamento de pedidos, acionam esta funcionalidade do sistema, que realiza um balanço dos apontamentos e registra as quantidades de cada matéria-prima e produto em estoque.
- **Cadastro de clientes e fornecedores:** o gestor técnico-comercial cadastrá e gerencia os clientes e fornecedores da empresa, de forma a relacionar os apontamentos de entrada e saída de material da empresa com suas origens e destinos.
- **Cadastro de matérias-primas:** o gestor técnico-comercial registra as matérias-primas e suas propriedades nutricionais, bem como previsões de custo, que serão utilizadas na funcionalidade de planejamento.
- **Colocação de pedidos:** ao efetuar uma venda, o gestor técnico-comercial registra o comprador, os produtos vendidos e datas de entrega no sistema. Caso o produto vendido tenha que ser formulado, a funcionalidade de gestão de produtos e famílias é acionada. Isto está representado na figura 4.1 por meio da palavra-chave <<extend>>.
- **Gestão de produtos e famílias:** o gestor técnico-comercial define as famílias de produtos que agregarão os produtos da empresa, agrupando-os a partir de semelhanças de requisitos nutricionais. Também são armazenadas informações a respeito da demanda futura destas famílias. Com base nas famílias, o gestor técnico-comercial formula os produtos, acrescentando

elementos específicos como vitaminas e suplementos minerais nas formulações genéricas das famílias.

4.2. Arquitetura do sistema

Durante a implementação dos modelos propostos, dois objetivos foram buscados: praticidade de aplicação e viabilidade econômica.

O primeiro objetivo está relacionado com o desenvolvimento de um sistema que permita que o usuário leigo em pesquisa operacional consiga, através de interfaces intuitivas, executar as funções de planejamento agregado e seqüenciação. No entanto, o sistema desenvolvido deve ser flexível a ponto de permitir ao usuário a utilização completa dos recursos do modelo.

Já o segundo objetivo refere-se ao custo da solução, cujo principal componente são as licenças dos *softwares* envolvidos. São necessários três tipos de *software* para a implementação deste modelo: uma linguagem de programação, um banco de dados e um pacote de otimização linear. O software *Microsoft AccessTM*, versão 98, foi escolhido para banco de dados, e o *Microsoft Visual Basic for ApplicationsTM* (VBA) para linguagem de programação, visto que a empresa possui suas licenças através do pacote *OfficeTM*.

Em relação ao último tipo de software necessário, existem diversos pacotes comerciais de otimização numérica, como o *What's BestTM* da Lindo Systems, que atenderiam de forma excelente às necessidades do modelo proposto, porém seu custo seria demasiadamente elevado para uma empresa de pequeno porte.

Em uma primeira tentativa, buscou-se programar um algoritmo simplex na linguagem de programação C a partir de código presente em SEDGEWICK (1990). O resultado foi um algoritmo que, apesar de resolver problemas de pequena dimensão de forma bastante satisfatória, não tinha capacidade de resolver os modelos

propostos neste trabalho. Estes modelos são degenerados, o que torna o simplex um método mais ineficiente exigindo mais iterações (WINSTON, 1994), e a propagação de erros de precisão no algoritmo desenvolvido acabava por corromper as matrizes de dados do simplex, corrompendo o problema original.

A solução encontrada foi a utilização do pacote de otimização linear *LP Solve*, de código aberto, que apresentou desempenho necessário em todas instâncias testadas. A licença de uso do *LP Solve* permite que este seja utilizado livremente em quaisquer aplicações, mesmo que comerciais. Outro ponto positivo do *LP Solve* é que este pode ser acionado automaticamente através do VBA.

A arquitetura do sistema é representada pela figura abaixo:

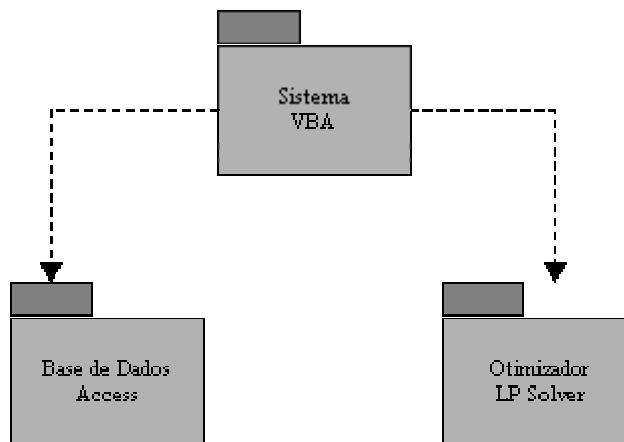


Figura 4.2: Arquitetura do sistema

4.3. Interfaces

As interfaces do sistema com o usuário estão dispostas no próximo diagrama:

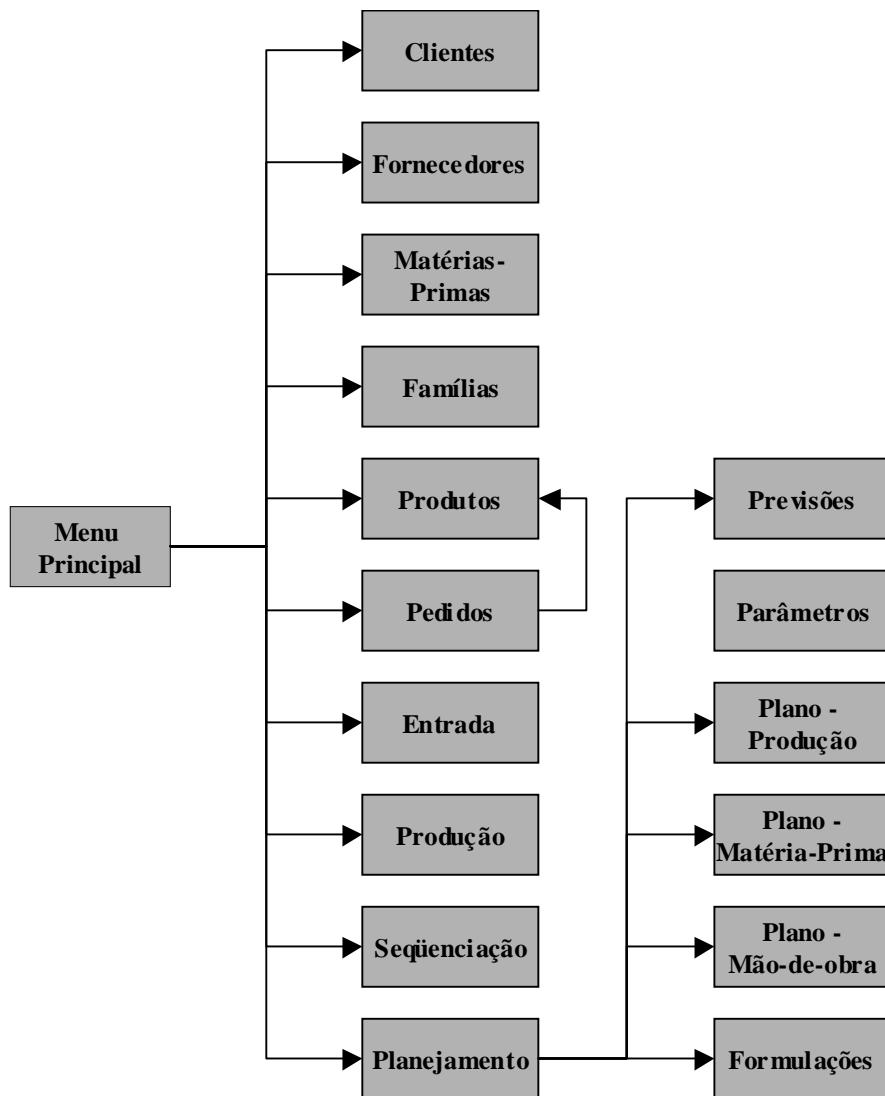


Figura 4.3: Interfaces do sistema com o usuário

- **Menu Principal:** é a primeira interface que o usuário defronta-se quando acessa o sistema. A partir desta tela, é possível acessar todas as interfaces principais do sistema.

- **Clientes:** é por meio desta interface que o usuário faz a gestão das informações dos clientes da empresa. Todos pedidos são vinculados a um cliente
- **Fornecedores:** semelhante à interface de clientes, esta interface permite a gestão das informações de fornecedores. Toda entrada de matéria-prima necessita de um fornecedor vinculado.
- **Matérias-primas:** nessa interface é possível cadastrar matérias-primas e seus principais componentes nutricionais. Também é possível verificar o nível de estoque de cada matéria-prima.
- **Famílias:** o usuário cadastrá as famílias de produtos e seus requisitos nutricionais nesta interface. A partir deste cadastro, o planejamento gerará as fórmulas de mínimo custo para cada família. A demanda prevista para cada família deve ser introduzida na tela de planejamento, visto que diversas previsões podem ser simuladas para cada família.
- **Produtos:** nesta interface, o usuário pode desenvolver e cadastrar produtos com base nas famílias do plano agregado ativo. Uma vez carregada a fórmula da família, o usuário pode adicionar outros elementos ao produto, como vitaminas ou minerais. A interface realiza automaticamente uma série de cálculos nutricionais, automaticamente, para que o usuário possa calcular impactos de adição e retirada de elementos. A seguir uma imagem da interface:

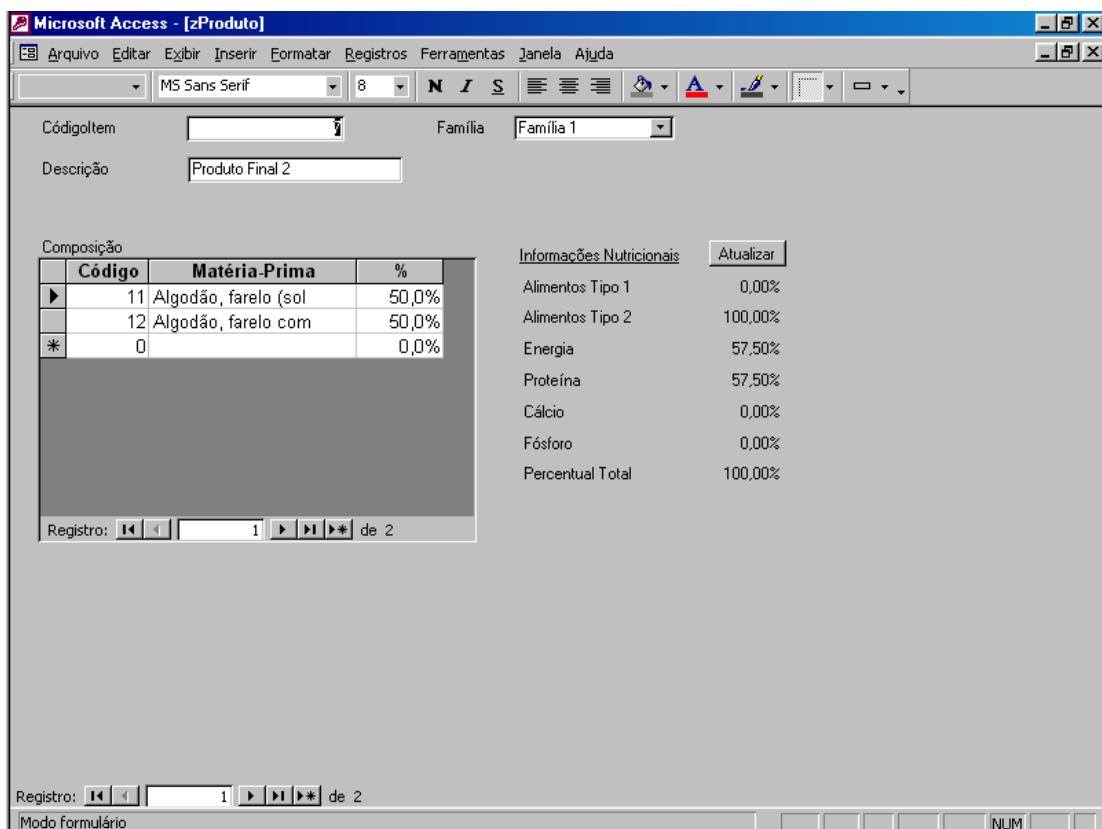


Figura 4.4: Interface de elaboração de produtos

- **Pedidos:** através desta interface o usuário pode colocar pedidos de clientes, contendo cada pedido diversos produtos. Há a possibilidade de ir diretamente para a interface de produtos, caso seja necessário criar um produto novo para o cliente. Além disto, esta interface também permite que o cliente realize apontamentos de saída de pedidos, atualizando automaticamente o estoque.
- **Entrada:** é a interface pela qual o usuário aponta o recebimento de matérias-primas, atualizando automaticamente o estoque de matérias-primas.
- **Produção:** é a interface pela qual o usuário realiza apontamentos de produção, atualizando automaticamente o estoque de matérias-primas e produto acabado.

- **Seqüenciação:** a partir da interface de seqüenciação, o usuário pode gerar um programa diário baseado no algoritmo descrito no capítulo três. A interface também informa o usuário do volume médio de produção diário para que o plano mensal seja atendido:

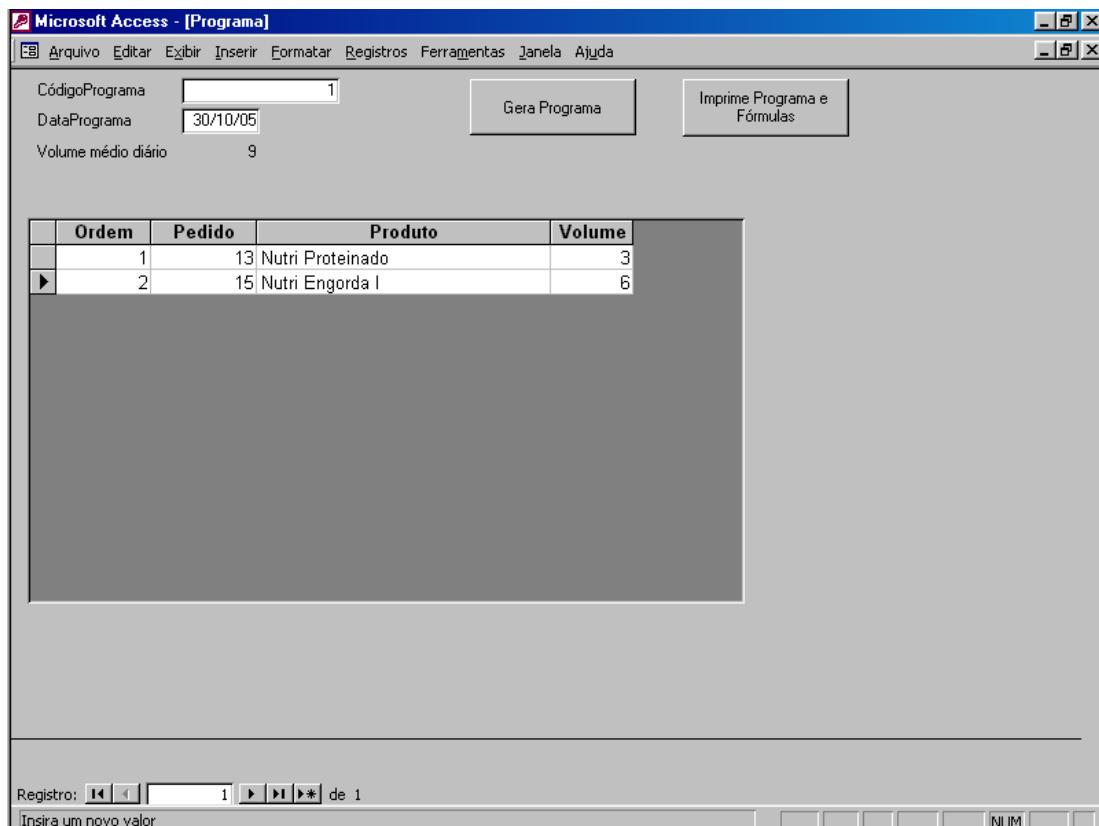


Figura 4.5: Interface de seqüenciação

- **Planejamento:** a interface consiste em duas pastas de entrada de dados e quatro de saída de dados. Tendo fornecido os dados, o usuário pode invocar o *LP Solver*, carregando-o com o modelo matemático de planejamento agregado. As soluções apresentadas pelo modelo são armazenadas e dispostas nas quatro pastas de saída de dados. Enquanto somente um plano agregado pode estar ativo, o sistema permite que sejam gerados diversos planos agregados com diferentes parâmetros, permitindo que o usuário simule diversas condições de produção no modelo. Na geração de novos planos, é dada opção ao usuário para copiar os dados de outro plano.

- **Previsões:** o usuário insere os dados relativos às previsões de demanda e custos de matérias-primas para cada um dos oito períodos do horizonte de planejamento:

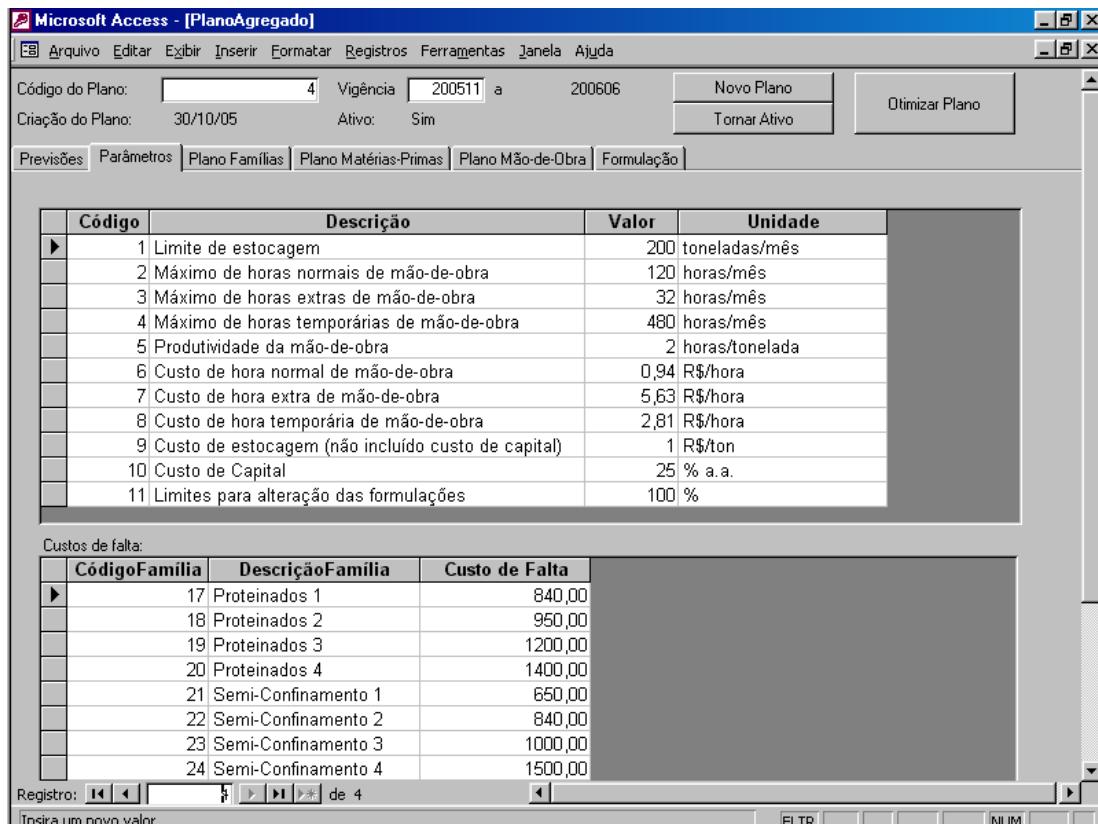


Figura 4.6: Interface de planejamento - pasta previsões

- **Parâmetros:** nesta interface, o usuário ajusta os demais parâmetros do modelo de planejamento agregado: limite de estocagem, disponibilidade e custos de cada tipo de mão-de-obra (regime de horas normais, regime de horas extras e mão-de-obra temporária), produtividade da mão-de-obra, custos de estocagem, custos de falta e custos de capital. Além das duas pastas, as outras entradas para o modelo são o nível atual dos estoques de matéria-prima e produtos acabados, além da formulação atual das famílias, dependendo das restrições estabelecidas na tela de parâmetros. Esta interface encontra-se disposta a seguir:

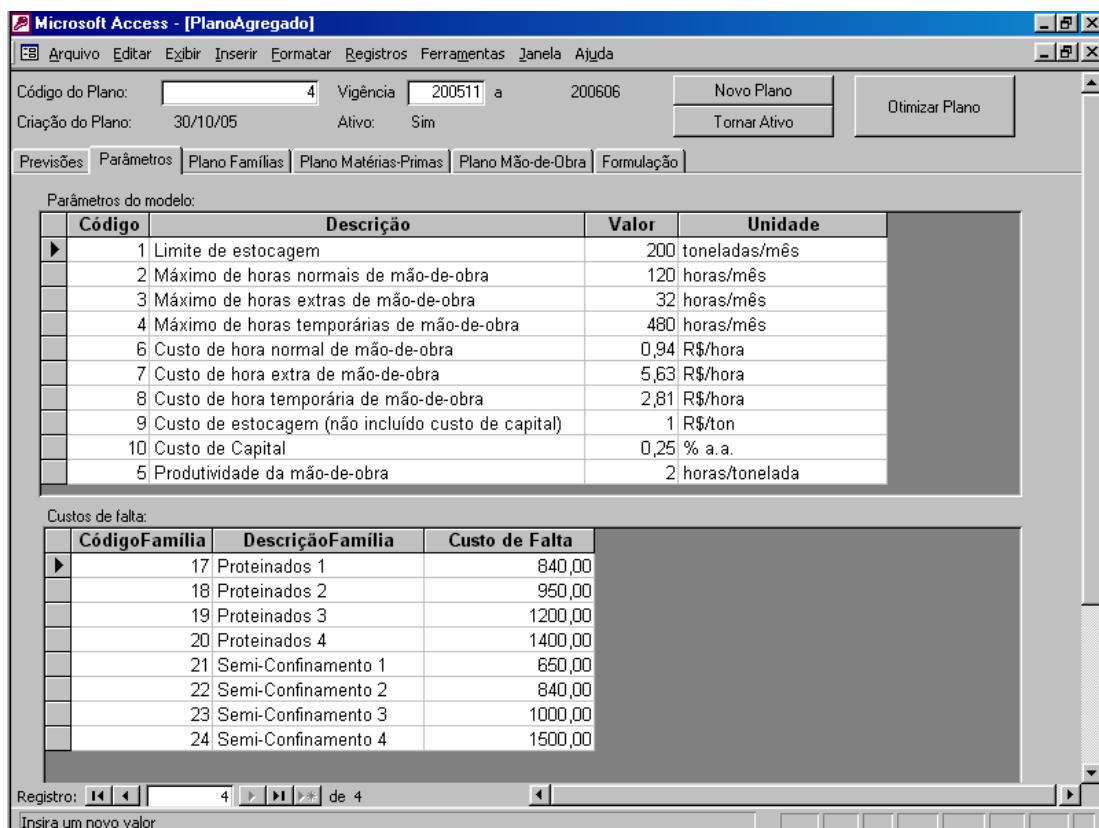


Figura 4.7: Interface de planejamento – pasta parâmetros

- **Plano – produção:** em uma mesma interface, o usuário pode consultar os planos otimizados a respeito dos volumes de produção, estoque e falta para todas as famílias contidas no plano e seus oito períodos:

Microsoft Access - [PlanoAgregado]

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Registros Ferramentas Janela Ajuda

Código do Plano: 4 Vigência 200511 a 200606 Novo Plano

Criação do Plano: 30/10/05 Ativo: Sim Tornar Ativo Otimizar Plano

Previsões | Parâmetros | **Plano Famílias** | Plano Matérias-Primas | Plano Mão-de-Obra | Formulação |

Produção por famílias:

Código	Descrição	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
► 17	Proteinados 1	3,77	3,61	6,03	10,31	22,44	31,32	59,93	0,00
18	Proteinados 2	3,77	3,61	6,03	10,31	22,44	31,32	59,93	0,00
19	Proteinados 3	3,77	3,61	6,03	10,31	22,44	31,32	39,13	20,80
20	Proteinados 4	3,77	3,61	6,03	10,31	22,44	31,32	39,13	20,80
21	Semi-Confinamei	1,62	1,55	2,59	4,42	9,62	13,42	25,68	0,00
22	Semi-Confinamei	1,62	1,55	2,59	4,42	9,62	13,42	16,77	8,91
23	Semi-Confinamei	1,62	1,55	2,59	4,42	9,62	13,42	16,77	8,91
24	Semi-Confinamei	1,62	1,55	2,59	4,42	9,62	13,42	16,77	8,91

Estoque por famílias:

Código	Descrição	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
► 17	Proteinados 1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	20,80	0,00
18	Proteinados 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	20,80	0,00
19	Proteinados 3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
20	Proteinados 4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
21	Semi-Confinamei	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	8,91	0,00
22	Semi-Confinamei	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
23	Semi-Confinamei	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
24	Semi-Confinamei	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Não-atendimento da demanda por famílias:

Código	Descrição	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
► 17	Proteinados 1	0	0	0	0	0	0	0	0

Registro: 17 de 4 FLTR

Insera um novo valor

Figura 4.8: Interface de planejamento – plano de produção

- **Plano – Matérias-Primas:** contém as quantidades a serem compradas de matérias-primas por período, além dos estoques destas nos finais dos períodos:

Compras de Matérias-Primas:

Código	Descrição	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
23	Algodão, farelo (g)	0,54	1,89	4,44	0,00	0,00	13,18	0,00	0,00
11	Algodão, farelo (s)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
12	Algodão, farelo c	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
24	Arroz, farelo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
25	Arroz, farelo desidratado	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
26	Arroz, quirera	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
27	Citrus, farelo de jaca	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
13	Girassol, farelo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
14	Girassol, farelo s	3,30	3,24	14,67	0,00	20,15	28,11	53,80	0,00

Estoque de Matérias-Primas:

Código	Descrição	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
23	Algodão, farelo (g)	0,00	1,17	4,73	3,24	0,00	8,66	3,00	0,00
11	Algodão, farelo (s)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
12	Algodão, farelo c	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
24	Arroz, farelo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
25	Arroz, farelo desidratado	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
26	Arroz, quirera	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
27	Citrus, farelo de jaca	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
13	Girassol, farelo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
14	Girassol, farelo s	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 4.9: Interface de planejamento – matérias-primas

- **Plano – Mão-de-obra:** apresenta o número de horas de mão-de-obra necessárias para efetuar a produção em cada período. As horas são subdivididas em normais, extras e temporárias:

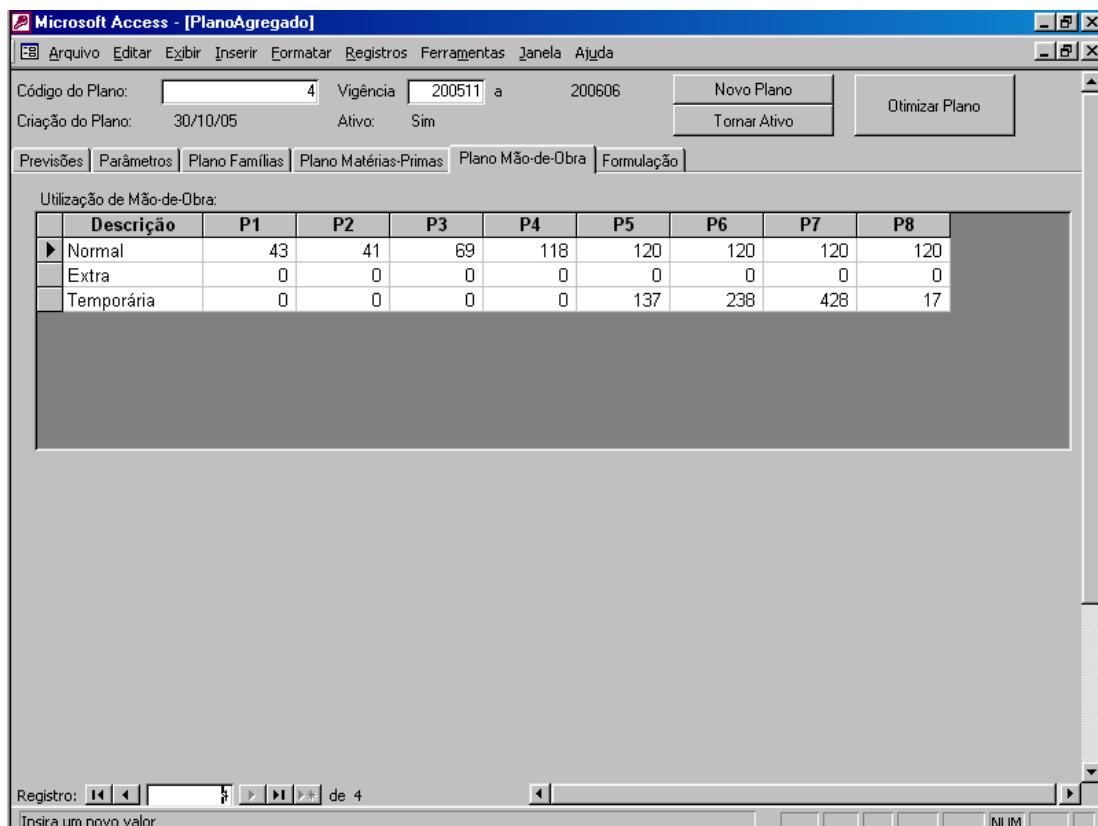


Figura 4.10: Interface de planejamento – mão-de-obra

- **Formulações:** apresenta o percentual de cada matéria-prima na composição da família:

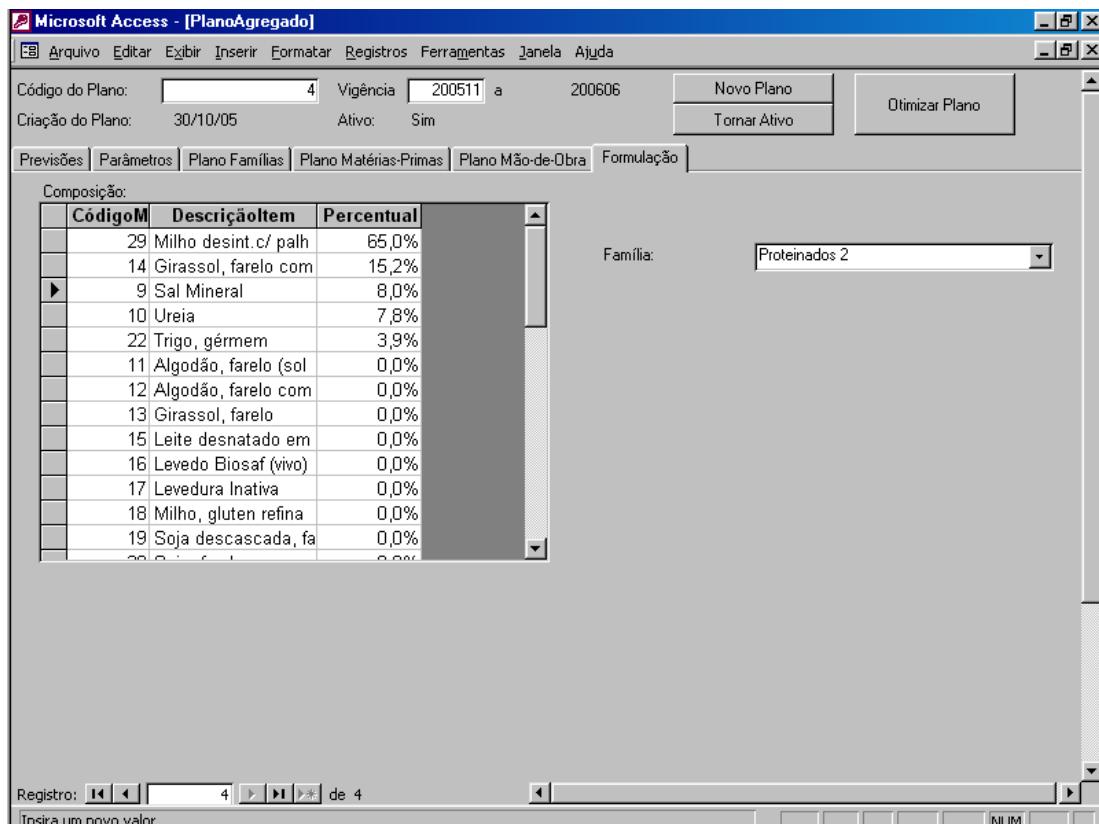


Figura 4.11: Interface de planejamento – formulação

4.4. Classes Persistentes e Relacionamentos

Neste tópico são detalhadas as classes de objetos persistentes, isto é, que são armazenadas na base de dados, e os relacionamentos entre elas. Para tal, é utilizado um diagrama de classes, porém sem atributos, por questões de espaço. Os atributos de cada classe serão detalhados em seguida:

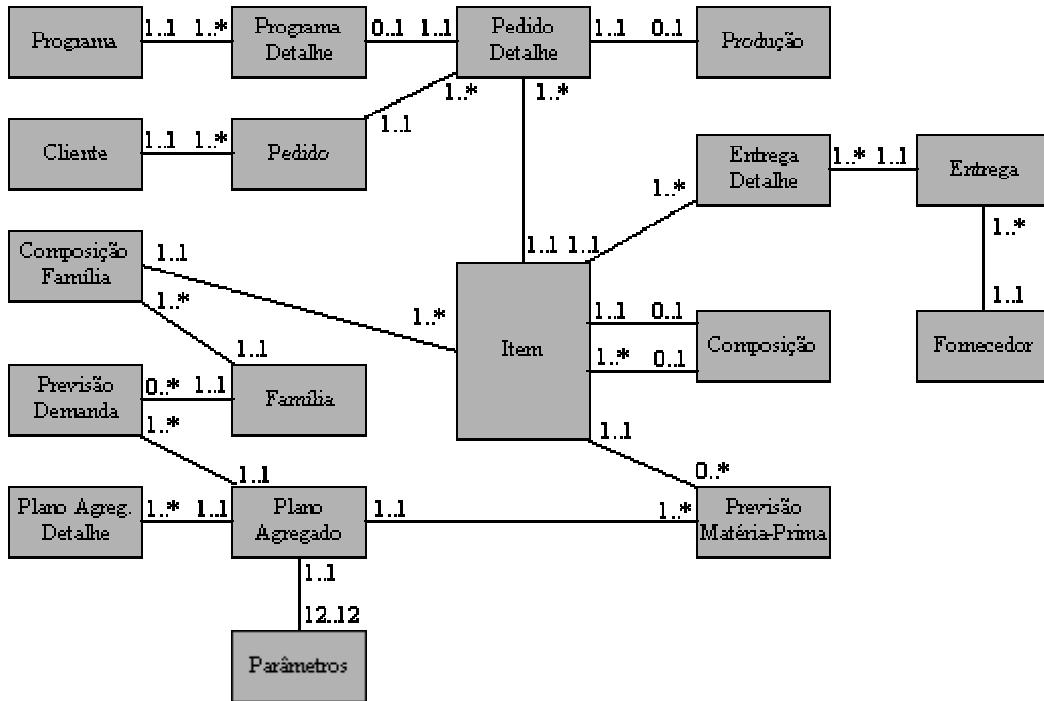


Figura 4.12: Diagrama de classes e relacionamentos

Classe: Item

Os objetos desta classe compreendem todos os matérias-primas e produtos da empresa. No caso das matérias-primas, os valores nutricionais destas também são atributos desta classe. Outro atributo desta classe é a quantidade em estoque do determinado item. O motivo para tratar matérias-primas e produtos finais dentro da mesma classe é a possibilidade da venda de matérias-primas para os clientes.

Tabela 4.1: Atributos da classe item

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoItem	Inteiro Longo	Código de identificação exclusiva do item
MateriaPrima	Booleano	Identifica se é produto final ou matéria-prima
CódigoFamília	Inteiro Longo	Código da família a que pertence o produto Nulo se item for matéria-prima
DescriçãoItem	Texto 30	Texto descritivo do item
Tipo 1	Booleano	Verdadeiro se item for matéria-prima e se enquadre no grupo de alimentos definido como “tipo 1”
Tipo 2	Booleano	Verdadeiro se item for matéria-prima e se enquadre no grupo de alimentos definido como “tipo 2”
Energia	Real	Se item for matéria-prima, indica quantidade de energia em uma tonelada do item
Proteína	Real	Se item for matéria-prima, indica quantidade de

		proteína em uma tonelada do item
Cálcio	Real	Se item for matéria-prima, indica quantidade de cálcio em uma tonelada do item
Fósforo	Real	Se item for matéria-prima, indica a quantidade de fósforo em uma tonelada do item
Observações	Texto livre	Observações a respeito do item
QtdeEstoque	Real	Quantidade (em toneladas) do item no estoque

Classe Família:

Esta classe armazena as famílias de produtos, que são descritos por seus requisitos nutricionais.

Tabela 4.2: Atributos da classe família

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoFamília	Inteiro Longo	Código de identificação exclusiva da família
DescriçãoFamília	Texto 30	Texto descritivo da família
MáximoTipo1	Real	Máxima porcentagem de alimentos classificados como tipo 1 na composição da família
MáximoTipo2	Real	Máxima porcentagem de alimentos classificados como tipo 2 na composição da família
MínimoEnergia	Real	Mínimo de unidades de energia por tonelada na família
MínimoProteína	Real	Mínimo de unidades de proteína por tonelada na família
MáximoUréia	Real	Percentual máximo de uréia na composição da família
Outros	Real	Percentual fixo da família que será substituído por vitaminas e suplementos minerais na composição do produto

Classe ComposiçãoFamília:

Esta classe armazena os percentuais de itens matérias-primas na composição das famílias, para cada plano agregado, uma vez que estes modificam a composição das famílias.

Tabela 4.4: Atributos da classe ComposiçãoFamília

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoPlanoAgregado	Inteiro Longo	Plano agregado a que a composição está ligada
CódigoFamília	Inteiro Longo	Família cuja composição está sendo descrita
CódigoMatériaPrima	Inteiro Longo	Código do item matéria-prima que compõe a família
Percentual	Real	Percentual da matéria-prima na composição da família

Classe Composição:

Esta classe armazena os percentuais de itens matéria-prima nos itens produto, que foram calculados baseando-se na composição das famílias.

Tabela 4.5: Atributos da classe composição

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoProduto	Inteiro Longo	Item produto cuja composição está descrita
CódigoMatériaPrima	Inteiro Longo	Item matéria-prima que compõe o produto
Percentual	Real	Percentual da matéria-prima na composição do produto

Classe Cliente:

Contém dados do cadastro de clientes.

Tabela 4.6: Atributos da classe Cliente

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoDoCliente	Inteiro Longo	Código de identificação exclusiva do cliente
NomeEmpresa	Texto 50	Nome da empresa cliente
NomeDoContato	Texto 60	Nome do contato na empresa cliente
Telefone	Texto 14	Número de telefone de contato do cliente
FAX	Texto 14	Número de FAX do cliente
Email	Texto 50	Endereço de e-mail do cliente
Endereço	Texto 255	Endereço do cliente
Cidade	Texto 50	Cidade do cliente
Estado	Texto 2	Estado do cliente
CEP	Texto 9	CEP do cliente
Observação	Texto livre	Observações e notas sobre o cliente

Classe Fornecedor:

Contém dados de cadastro de fornecedores.

Tabela 4.7: Atributos da classe Fornecedor

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoDoFornecedor	Inteiro Longo	Código de identificação exclusiva do fornecedor
NomeEmpresa	Texto 50	Nome da empresa fornecedora
NomeDoContato	Texto 60	Nome do contato na empresa fornecedora
Telefone	Texto 14	Número de telefone de contato do fornecedor
FAX	Texto 14	Número de FAX do fornecedor
Email	Texto 50	Endereço de e-mail do fornecedor
Endereço	Texto 255	Endereço do fornecedor
Cidade	Texto 50	Cidade do fornecedor
Estado	Texto 2	Estado do fornecedor
CEP	Texto 9	CEP do fornecedor
Observação	Texto livre	Observações e notas sobre o fornecedor

Classe Pedido:

Seus objetos são os cabeçalhos dos pedidos, que são complementados por objetos da classe PedidoDetalhe. Um objeto da classe pedido pode ser um pedido efetivo ou ainda uma previsão.

Tabela 4.8: Atributos da classe Pedido

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoPedido	Inteiro Longo	Código de identificação exclusiva do pedido
CódigoCliente	Inteiro Longo	Código do cliente que realiza o pedido
DataElaboração	Data	Data de elaboração do pedido
DataEntrega	Data	Data prevista para entrega dos produtos pedidos
Observações	Texto livre	Observações e notas sobre o pedido
Pedido Efetivo	Booleano	Falso se o objeto refere-se a uma previsão Verdadeiro se o objeto refere-se a um pedido

Classe PedidoDetalhe:

Seus objetos representam as linhas ou itens dos pedidos, isto é, os produtos que compõe cada pedido.

Tabela 4.9: Atributos da classe PedidoDetalhe

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoPedidoDetalhe	Inteiro Longo	Código de identificação exclusiva da linha do pedido
CódigoPedido	Inteiro Longo	Código do pedido a que se refere a linha
CódigoProduto	Inteiro Longo	Código do produto pedido
Volume	Real	Quantidade a ser entregue do produto
Unidade	Texto 2	Unidade em que a quantidade foi expressa
Terminado	Booleano	Verdadeiro se o produto pedido já foi processado
Entregue	Booleano	Verdadeiro se o produto pedido já foi entregue

Classe PlanoAgregado:

É composta dos diversos planos agregados gerados. Em um dado momento, somente um plano agregado pode estar ativo, porém o usuário pode gerar outros planos agregados com o intuito de simular cenários alternativos de demanda, custos e restrições produtivas. Além disto, os planos agregados não são perdidos na atividade de re-planejamento, mas são armazenados como inativos.

Tabela 4.10: Atributos da classe PlanoAgregado

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoPlanoAgregado	Inteiro Longo	Código de identificação exclusiva do plano agregado
Mês	Inteiro Longo	Mês correspondente ao primeiro período do plano agregado, no formato AAAAMM
DataCriação	Data	Data de criação do plano agregado
Ativo	Booleano	Verdadeiro se o plano agregado está ativo Falso se o plano agregado é uma simulação ou um plano antigo armazenado

Classe PlanoAgregadoDetalhe:

Compreende os planos de produção, estoque de produto e matéria-prima, permissão de não-atendimento de demanda, e utilização de horas de mão-de-obra.

Tabela 4.11: Atributos da classe PlanoAgregadoDetalhe

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoPlanoAgregado	Inteiro Longo	Plano agregado a que o detalhe corresponde Identifica a que se refere o objeto: 1 – Plano de produção 2 – Plano de estoque de produto final 3 – Permissão de não-atendimento da demanda
Variável	Inteiro	

		4 – Plano de estoque de matéria-prima 5 – Plano de compras de matéria-prima 6 – Demanda de horas de mão-de-obra
Código	Inteiro Longo	Depende do valor do atributo variável: Variável = 1,2,3 – código da família Variável = 4,5 – código da matéria-prima Variável = 6 – assume valores 1, 2 e 3 para mão-de-obra em regime normal, extra e temporária, respectivamente.
Valor P1	Real	Valor no período 1
Valor P2	Real	Valor no período 2
Valor P3	Real	Valor no período 3
Valor P4	Real	Valor no período 4
Valor P5	Real	Valor no período 5
Valor P6	Real	Valor no período 6
Valor P7	Real	Valor no período 7
Valor P8	Real	Valor no período 8

Classe PrevisãoDemanda:

Os objetos desta classe são as previsões de demanda nos oito períodos do plano agregado, para as famílias de produtos.

Tabela 4.12: Atributos da classe PrevisãoDemanda

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoPlanoAgregado	Inteiro Longo	Plano agregado a que a previsão corresponde
CódigoFamília	Inteiro Longo	Família de produtos a que a previsão se refere
Vendas P1	Real	Vendas previstas no período 1
Vendas P2	Real	Vendas previstas no período 2
Vendas P3	Real	Vendas previstas no período 3
Vendas P4	Real	Vendas previstas no período 4
Vendas P5	Real	Vendas previstas no período 5
Vendas P6	Real	Vendas previstas no período 6
Vendas P7	Real	Vendas previstas no período 7
Vendas P8	Real	Vendas previstas no período 8

Classe PrevisãoMatériaPrima:

É a classe das previsões de custos para as matérias-primas selecionadas para o plano agregado.

Tabela 4.13: Atributos da classe PrevisãoMatériaPrima

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoPlanoAgregado	Inteiro Longo	Plano agregado a que a previsão corresponde
CódigoMatériaPrima	Inteiro Longo	Item matéria-prima a que a previsão se refere
Custo P1	Real	Custo previsto no período 1
Custo P2	Real	Custo previsto no período 2
Custo P3	Real	Custo previsto no período 3
Custo P4	Real	Custo previsto no período 4
Custo P5	Real	Custo previsto no período 5
Custo P6	Real	Custo previsto no período 6
Custo P7	Real	Custo previsto no período 7
Custo P8	Real	Custo previsto no período 8

Classe Parâmetro:

Esta classe contém os parâmetros do modelo de planejamento agregado, exceto as previsões de vendas e custos, que são objetos das classes PrevisãoDemanda e PrevisãoMatériaPrima, além dos estoques iniciais, que são retirados diretamente dos objetos da classe Item.

Tabela 4.14: Atributos da classe Parâmetros

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoPlanoAgregado	Inteiro Longo	Plano agregado a que se refere o parâmetro Especifica o parâmetro: 1 – Limite máximo mensal de estocagem 2 – Máximo mensal de horas normais de mão-de-obra 3 – Máximo mensal de horas extras de mão-de-obra 4 – Máximo mensal de horas de mão-de-obra temporária 5 – Produtividade da mão-de-obra 6 – Custo de hora normal de mão-de-obra 7 – Custo de hora extra de mão-de-obra 8 – Custo de hora de mão-de-obra temporária 9 – Custo de estocagem (excluído custo de capital imobilizado) 10 – Custo de capital (em taxa anual) 11 – Liberdade para modificar composição de famílias (em %)
CódigoParâmetro	Inteiro	
DescriçãoParâmetro	Texto 60	Descrição do parâmetro
Valor	Real	Valor do parâmetro
Unidade	Texto	Unidade do parâmetro (somente leitura, para informação do usuário)

Classe Entrada:

Seus objetos são entradas de matérias-primas na empresa.

Tabela 4.15: Atributos da classe Entrada

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoEntrada	Inteiro Longo	Código de identificação exclusiva da entrada
CódigoFornecedor	Inteiro Longo	Código do fornecedor que vende as matérias-primas
DataRecebimento	Data	Data de recebimento da matéria-prima

Classe EntradaDetalhe:

Contém a relação de matérias-primas recebida em cada objeto entrada

Tabela 4.16: Atributos da classe EntradaDetalhe

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoEntrada	Inteiro Longo	Entrada a que corresponde o recebimento da matéria-prima detalhada
CódigoMatériaPrima	Inteiro Longo	Código do item matéria-prima que foi recebido
ValorUnitário	Real	Valor unitário da matéria-prima
Unidade	Texto 2	Unidade de medida da matéria-prima
Volume	Real	Quantidade recebia, expressa em termos da unidade
Atualizar	Booleano	Atributo utilizado pelo sistema para controlar atualizações de estoque
Apagar	Booleano	Atributo utilizado pelo sistema para marcar um recebimento de matérias-primas para ser apagado

Classe Produção:

Contém os apontamentos de processamento de pedidos. Vários objetos da classe produção podem referir-se ao mesmo item de um pedido, uma vez que a produção deste item pode se dividir em mais de um dia.

Tabela 4.17: Atributos da classe Produção

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoPedidoDetalhe	Inteiro Longo	Referência ao pedido
DataProdução	Data	Data em que é realizada a produção
VolumeProdução	Real	Volume produzido
Atualizar	Booleano	Atributo utilizado pelo sistema para controlar atualizações de estoque
Apagar	Booleano	Atributo utilizado pelo sistema para marcar um recebimento de matérias-primas a ser apagado

Classe Programa:

Seus objetos são criados pelo modelo de seqüenciação (MS), contendo os produtos a serem fabricados no dia.

Tabela 4.18: Atributos da classe Programa

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoPrograma	Inteiro Longo	Código de identificação exclusiva do programa
DataPrograma	Data	Data para a realização do programa, que coincide com sua geração
VolumeMédio	Real	Volume médio diário necessário para que o plano seja cumprido

Classe ProgramaDetalhe:

Contém a relação de itens a serem produzidos no dia, e sua seqüência.

Tabela 4.19: Atributos da classe ProgramaDetalhe

Atributos	Tipo	Descrição
CódigoPrograma	Inteiro Longo	Programa a que corresponde o item a ser produzido
Ordem	Inteiro	Posição na seqüência de produção
PedidoDetalhe	Inteiro Longo	Código do item do pedido a ser produzido
Volume	Real	Quantidade a ser produzida (um item de pedido pode ser produzido de forma parcelada)

5. CONCLUSÃO

5.1. Comentários sobre resultados obtidos

A introdução do modelo de apoio à decisão desenvolvido na Nutrinvest é, antes de tudo, emblemática, já que é a primeira vez que a empresa passa a utilizar-se de uma aplicação deste tipo. O próprio trabalho de desenvolvimento do sistema fomentou interesse pelo potencial exibido pelas ferramentas de pesquisa operacional utilizadas.

Além dos objetivos de redução de custos que o modelo se propunha, a implantação do sistema traz outros benefícios. Um deles é a busca sistemática por novas matérias-primas e maior pesquisa de preços. Outro é a manutenção de um histórico de vendas, fórmulas e mesmo preços de matérias-primas, o que permitirá que a empresa possa analisar com maior detalhe as informações do passado.

Recentemente, surgiram focos de febre aftosa no Rio Grande do Sul, o que fez com que muitos mercados do Brasil começassem a rever as importações brasileiras. Para a Nutrinvest, isso certamente significa queda na demanda de seus produtos. Para precaver-se disto, a empresa iniciou estudos para fabricar rações destinadas à outros animais, como aves e suíños. A introdução destes novos produtos, caso venha a acontecer, dificultaria sobremaneira o processo de planejamento atual, mas pode ser tratado adequadamente pelo modelo desenvolvido.

A utilização efetiva do modelo pela empresa iniciar-se-á no ano de 2006, uma vez que o momento de alta demanda deste ano já findou, e as vendas caem a um nível bastante baixo, praticamente com o intuito de liquidar o estoque restante.

5.2. Desdobramentos do trabalho

Um possível desdobramento do trabalho é o desenvolvimento de modelos mais sofisticados para a composição do produto final a partir das famílias, já que o modelo implementado limita-se a otimizar energia e proteínas, no nível das famílias.

O modelo de seqüenciação, que não era o foco principal deste trabalho, pode ser modificado para que outros critérios de priorização sejam utilizados.

Outro desenvolvimento que este trabalho abre caminhos é a consideração de múltiplas unidades produtivas, uma vez que a empresa pretende, a médio prazo, abrir uma nova fábrica no Estado do Mato Grosso.

5.3. Considerações finais

Neste trabalho, ao invés da aplicação de uma ferramenta pronta a um problema, diversas ferramentas distintas do curso de Engenharia de Produção foram combinadas para o desenvolvimento de uma solução inovadora para uma empresa específica.

Além disso, o trabalho representou ao autor uma grande oportunidade para que este aplicasse os conceitos aprendidos no curso de Engenharia de Produção em uma empresa de pequeno porte, e desta forma tomasse conhecimento dos tipos de dificuldades que afligem estes negócios, que estão na base do processo empreendedor.

A modelagem matemática envolvida no trabalho também permitiu grande aprendizado ao autor, principalmente a respeito de modelos não-lineares e uma série de técnicas simples para a resolução destes, como a PLS, que pode ser aplicada a uma classe bastante ampla de problemas. Desta forma, o autor expandiu consideravelmente sua capacidade de modelagem.

Por fim, no decorrer da implementação do sistema, foram encontradas ferramentas de baixo custo ou mesmo de licença aberta que possibilitam o desenvolvimento de diversas aplicações a um custo bastante reduzido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AL-KHAYYAL, F. A. Generalized bilinear programming: Part I. Models, applications, and linear programming relaxation. **European Journal of Operational Research**. Vol. 60, pp306-314, 1992

ASHAYERI, J. et al. Blending modeling in a process manufacturing: A case study. **European Journal of Operational Research**. Vol. 72, pp. 460-468, 1994.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS INDÚSTRIAS EXPORTADORAS DE CARNE (ABIEC). **Balanço da pecuária bovina de corte**. Apresenta séries históricas de produção e exportação de carne bovina. Disponível em <<http://www.abiec.com.br/abiec/estatisticas.php>>. Acesso em 29/10/2005.

AUDET, C. et al. A branch and cut algorithm for nonconvex quadratically constrained quadratic programming. **Mathematical Programming**. Ser. A 87, pp. 131-152, 2000.

AUDET, C. et al. Pooling problem: Alternate formulations and solutions methods. **Management Science**. Vol. 50, No. 6, pp. 761-776, 2004

BUFFA, E.S.; MILLER, J.G. Production – **Inventory Systems: Planning and Control**. Illinois: Richard D. Irwin Inc, 1979.

FERREIRA, J. J. Proteína e concentrados protéicos na alimentação de ruminantes. **Informe Agropecuário**. Ano 9, n. 108, 1983

GARILLE, S.G.; GASS, S. I. Stigler's diet problem revisited. **Operations Research**. Vol 49 (1), pp1-13, 2001.

GRIFFITH, R.E.; STEWART, R. A. A nonlinear programming technique for the optimization of continuous processing systems. **Management Science**. Vol. 7, pp. 379-392, 1961

HARVEY, A. C. **Time Series Models**. Cambridge: The MIT Press, 1994.

HAX, A. C.; CANDEA, D. **Production and Inventory Management**. New Jersey: Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1984.

JOHNSON, L. A; MONTGOMERY, D. C. **Operations research in production planning, scheduling, and inventory control**. New York: Wiley, 1974.

KOTLER, P.; ARMSTRONG, G. **Princípios de Marketing**. São Paulo: Prentice Hall, 2003.

LANCASTER, L. M. The history of the application of mathematical programming to menu planning. **European Journal of Operational Research**. Vol 57, pp339-347, 1992.

LINDEROTH, J. A simplicial branch-and-bound algorithm for solving quadratically constrained quadratic programs. **Mathematical Programming**. Vol 103(B), pp251-282, 2005

MORTON, T. E. **Production Operations Management**. Ohio: South-Western College Publishing, 1999.

MUNHOZ, J. R.; MORABITO, R. Um modelo baseado em programação linear e programação de metas para análise de um sistema de produção e distribuição de suco concentrado congelado de laranja. **Gestão & Produção**. Vol. 8, n. 2, pp139-159, 2001

NAHMIAS, S. **Production and Operations Analysis.** Chicago: Irvin/McGraw-Hill, 1997

PÁDUA, W. P. **Engenharia de Software: Fundamentos, Métodos e Padrões.** Rio de Janeiro: LTC Editora, 2003.

PORTER, M. E. **Competitive Strategy: Techniques for Analyzing Industries and Competitors.** New York: Free Press, 1980

SANTORO, M.C. **Princípios de Gestão da Produção e Logística.** Apostila da disciplina PRO 2412 – Departamento de Engenharia de Produção – Escola Politécnica – Universidade de São Paulo, 2005.

SANTOS, A.; CARVALHO, N. Comemoração Discreta. **Revista Exame.** Ano 38, n.8, 2004.

SCHUSTER, E. W.; ALLEN, S. J. Raw material management at Welch's, Inc. **Interfaces.** Vol. 28(5), pp13-24, 1998

SEGEWICK, R. **Algoritms in C.** Reading: Addison-Wesley Pub. Co., 1990.

SILVA, J. F. C. Concentrados energéticos para ruminantes. **Informe Agropecuário.** Ano 9, n. 108, 1983

SILVESTRE, J. R. A.; ROSTAGNO, H. S. Métodos de balanceamento de rações. **Informe Agropecuário.** Ano 9, n. 108, 1983

SOUZA, . J. C. Os minerais na alimentação dos ruminantes. **Informe Agropecuário.** Ano 9, n. 108, 1983

STIGLER, G. The cost of subsistence. **Journal of Farm Economics.** Vol 25, pp303-314, 1945.

VELLOSO, L. Importância das vitaminas para os bovinos. **Informe Agropecuário.**
Ano 9, n. 108, 1983

WINSTON, W. L. **Operations Research: Applications and Algorithms.** Belmont:
Duxbury Press, 1994